Doppelrepräsentation und Repräsentationswechsel als Komponenten kreativen mathematischen Verhaltens bei jüngeren Schülerinnen und Schülern

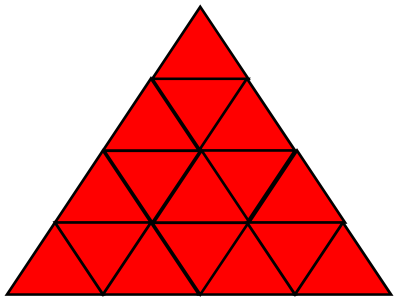
Frank Heinrich
(Technische Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig)
&
Torsten Fritzlar
(Leuphana Universität Lüneburg)

Begrifflichkeit und Bedeutung

Ein einführendes Beispiel:

geometrisch

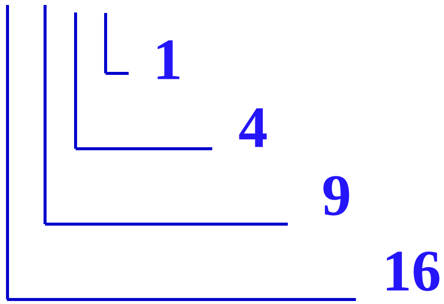
Dreiecksgitter



Modalität **Bild**

arithmetisch

Folge der Quadratzahlen



algebraisch

Bildungsvorschrift für diese Folge

$(a_n) = n^2$ mit $n \varepsilon N$

Modalität **Symbol**

Begriffliches und Bedeutung

Es gibt mathematikhaltige Situationen, Sachverhalte oder Vorgänge, die sowohl

(anschauungs)**geometrisch**
(also durch Formen, Figuren, Bilder)

Modalität BILD

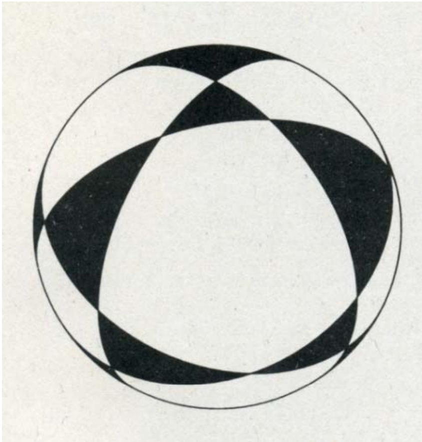
als auch

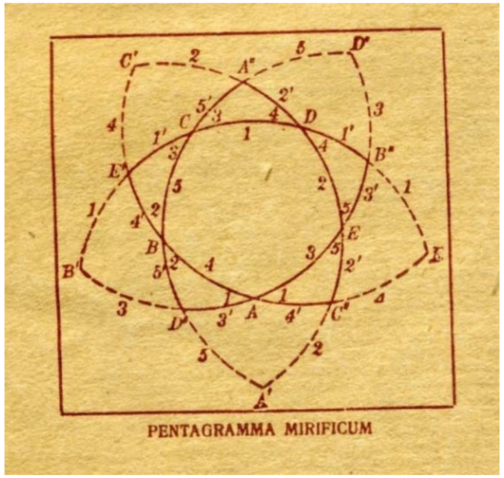
arithmetisch / algebraisch
(also durch Zahlen, Zahlzusammenhänge bzw. durch Symbole, Gleichungen, Ungleichungen etc.)

Modalität SYMBOL

betrachtet und beschrieben werden können.

Ein weiteres Beispiel

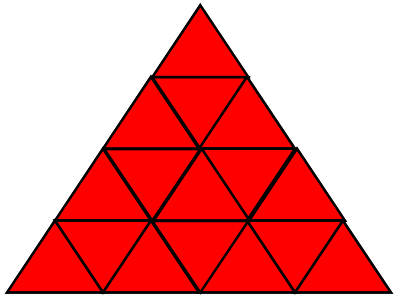




Geometrisch: **Gauß'sches Pentagramma Mirificum** (geschlossene Kette von 5 rechtwinkligen Dreiecken auf der Sphäre, die durch Nachbardreiecksbildung erzeugt wird)

Algebraisch: **Neper'sche Regel** (Im rechtwinkligen sphärischen Dreieck ist der Cosinus eines jeden Stückes gleich dem Produkt der Cotangenten der anliegenden, oder gleich dem Produkt der Sinusse der nicht anliegenden Stücke (der rechte Winkel gilt nicht als Stück).

Es ist möglich, von der einen in die andere Darstellungsform überzugehen (ein Repräsentationswechsel):



1

4

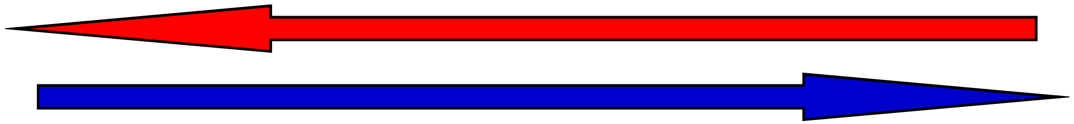
9

16

$a_n = n^2$

n: jeweilige Reihe

a_n: Anzahlen



- **Geometrische Repräsentation arithmetischer (algebraischer) - Zusammenhänge**

- **Arithmetische (algebraische) Deutung von Figurationen**

☞ Von mathematischen Sachverhalten sind verschiedene Repräsentationen, teilweise in verschiedenen Modalitäten möglich.

☞ Unterschiedliche Modalitäten legen unterschiedliche mathematische Betrachtungsweisen zum Sachverhalt nahe.

☞ Wird ein mathematischer Sachverhalt sowohl in der Modalität BILD als auch in der Modalität SYMBOL repräsentiert, sprechen wir von einer Doppelrepräsentation.

☞ Ein Modalitätswechsel ist ein spezieller Repräsentationswechsel.

Begrifflichkeit und Bedeutung

- Es ist beim Betreiben von Mathematik oftmals sinnvoll, mehrere Repräsentationen (Modalitäten, Betrachtungsweisen) parallel zu behandeln bzw. zu verbinden.

“In summary, any one representation rarely fulfills all requirements needed to deal with a problem or situation. Usually, several representations need to be used. Mathematical thinking is more powerful when it uses more than one representation in parallel, and establishes links between them. This provides flexibility and thus the links become overwhelmingly important.”

(Dreyfus & Eisenberg, 1996, S. 271)

Begrifflichkeit und Bedeutung

- Dafür lassen sich verschiedene, voneinander nicht unabhängige Begründungszusammenhänge finden.

  - ❖ Mathematikgeschichte
  - ❖ Mathematische Heuristik
  - ❖ Begabungsforschung im Bereich Mathematik

  - ❖ pädagogische Psychologie
  - ❖ (traditionelle) Denkpsychologie

Mathematikgeschichte

Beziehungen zwischen **Figuren und Zahlen** haben in der Genese mathematischer Theorien seit jeher eine fundamentale Bedeutung gehabt,

z.B. die figurale Arithmetik der PYTHAGOREER,
die Analytische Geometrie von DESCARTES oder MINKOWSKIs Geometrie der Zahl.

(z.B. van der Waerden, 1956; Winter, 1999)

Mathematikgeschichte

Bestimmte Probleme, die einem bestimmten Teilgebiet der Mathematik entstammten, konnten erst mit Mitteln aus anderen mathematischen Sachgebieten gelöst werden.

Quadratur des Kreises (ca. 430 v. Ch.):
mit Zirkel und Lineal ist aus einem Kreis ein Quadrat mit gleich großer Fläche zu konstruieren (Bild).

Den Nachweis über die Unlösbarkeit erbrachte LINDEMANN (1852 – 1939) hingegen erst 1882 mit dem Beweis der Transzendenz von π (Symbol).

Mathematikgeschichte

Weitere derartige Beispiele:

- Lösen quadratischer Gleichungen durch geometrisch-manipulative Methoden in Mesopotamien
- Verdopplung des Würfels mittels Parabeln durch Menaichmos
- Quadratur der Parabel durch Archimedes
- Ausarbeitung des Integralbegriffs durch Leibniz

Mathematikgeschichte / Math. Heuristik

Für die Herstellung neuer Mathematik haben sich in den letzten mehr als 5000 Jahren die folgenden **heuristischen Vorgehensweisen** als besonders fruchtbar erwiesen:

Analogisieren, inhaltliches Lösen, Rückwärtsarbeiten, sukzessive Approximation, **Repräsentationswechsel** und atomistische Methoden. (Zimmermann, 1999)

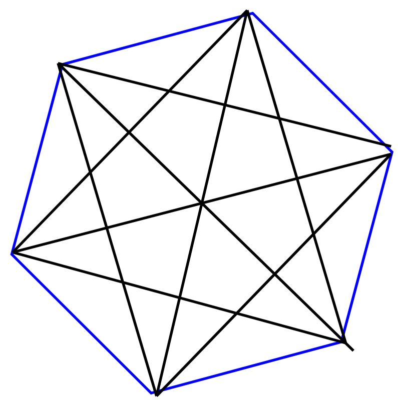
“Changing representations, esp. the mode of representation has been a very important and fruitful heuristic for several thousands of years.”

(Zimmermann, 2005, S. 148)

Der hier interessierende Wechsel von einer geometrischen zu einer arithmetisch - algebraischen Betrachtungsweise und umgekehrt ist ein spezieller Fall der oben hervorgehobenen Strategie.

Beispiel 1 (Diagonalen in konvexen Vielecken)

Ein Viereck besitzt 2 Diagonalen. Wie viele Diagonalen hat ein Sechseck und wie viele hat ein Dreißigeck?



Sechseck:

Nahe liegende Strategie: einzeichnen und zählen

(anschauungsgeometrische Betrachtungsweise)

Mathematische Heuristik

Beispiel 1 (Diagonalen in konvexen Vielecken)

Ein Viereck besitzt 2 Diagonalen. Wie viele Diagonalen hat ein Sechseck und wie viele hat ein Dreißigeck?

?

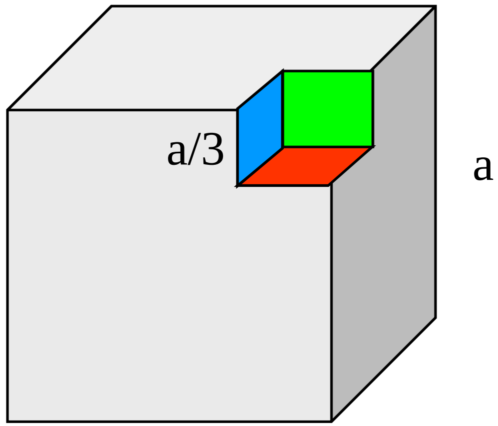
Dreißigeck:

Strategie: *Einzeichnen und Zählen* sind möglich, wegen des Aufwandes aber eher ungeeignet und fehleranfällig.

Wechsel zu einer arithmetisch – algebraischen Betrachtungsweise (Formel für Anzahl der Diagonalen in Abhängigkeit von der Eckenanzahl) ist angezeigt

Mathematische Heuristik

Beispiel 2 (Oberflächeninhalt)



Wie groß ist der Oberflächeninhalt des Restkörpers, wenn die Seitenlänge des herausgeschnittenen Würfels ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangswürfels ausmacht?

algebraisch: $A_1 = a^2,\ A_2 = (a/3)^2,\ A_3 = a^2 - (a/3)^2$

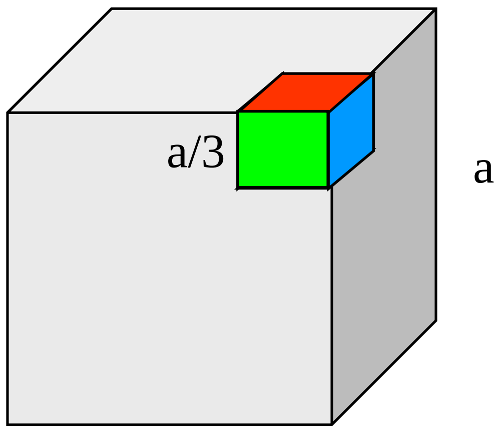
$$A_0 = 3\ A_1 + 3\ A_2 + 3\ A_3$$

$$A_0 = 3\ (a^2 + (a/3)^2 + a^2 - (a/3)^2),\ \ldots$$

geometrisch:

Mathematische Heuristik

Beispiel 2 (Oberflächeninhalt)



Wie groß ist der Oberflächeninhalt des Restkörpers, wenn die Seitenlänge des herausgeschnittenen Würfels ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangswürfels ausmacht?

algebraisch: $A_1 = a^2$, $A_2 = (a/3)^2$, $A_3 = a^2 - (a/3)^2$

$$A_O = 3\ A_1 + 3\ A_2 + 3\ A_3$$

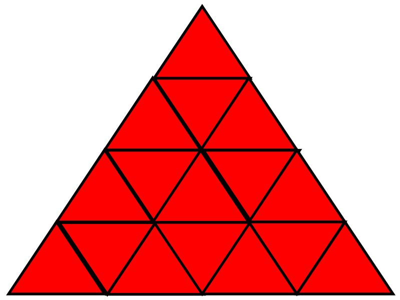
$$A_O = 3\ (a^2 + (a/3)^2 + a^2 - (a/3)^2), \ldots$$

geometrisch:

Mathematische Heuristik

Beispiel 3

Arithmetische Deutung einer Figuration



Mögliche Erkenntnis:

(0 + 1 = 1)

1 + 3 = 4

4 + 5 = 9

9 + 7 = 16

.... usw.

Die Differenzen aufeinander folgender Quadratzahlen liefern die ungeraden Zahlen.

Mathematische Heuristik

Wie diese Beispiele aus der *Schulmathematik* zeigen, kann es beim Lösen mathematischer Probleme nützlich und hilfreich sein, die Betrachtungsweise und Modalität zu wechseln.

Grundtypen mathematischer Probleme:

Bestimmungsprobleme
(z.B. Bestimmung von Zahlen und Größen)

Entscheidungsprobleme
(z.B. Beweis einer Behauptung)

Entdeckungsprobleme
(z.B. Aufstellen von Vermutungen noch unbekannter Gesetzmäßigkeiten, Entdeckung neuer Interpretationsmöglichkeiten eines vorgegebenen Sachverhalts)

(Kratz, 1988)

Mathematische Heuristik

Wie diese Beispiele aus der *Schulmathematik* zeigen, kann es beim Lösen mathematischer Probleme nützlich und hilfreich sein, die Betrachtungsweise und Modalität zu wechseln.

Beispiel 1 (Bestimmungsproblem):

Wechsel von einem bislang anschauungsgeometrischen Vorgehen zu einem arithmetisch – algebraischen Vorgehen

Beispiel 2 (Bestimmungsproblem)

Wechsel von einem arithmetisch – algebraischen Vorgehen zu einem anschauungsgeometrischen Vorgehen

Beispiel 3 (Entdeckungsproblem)

Wechsel von einer bislang anschauungsgeometrischen Betrachtung zu einer arithmetisch – algebraischen Betrachtung

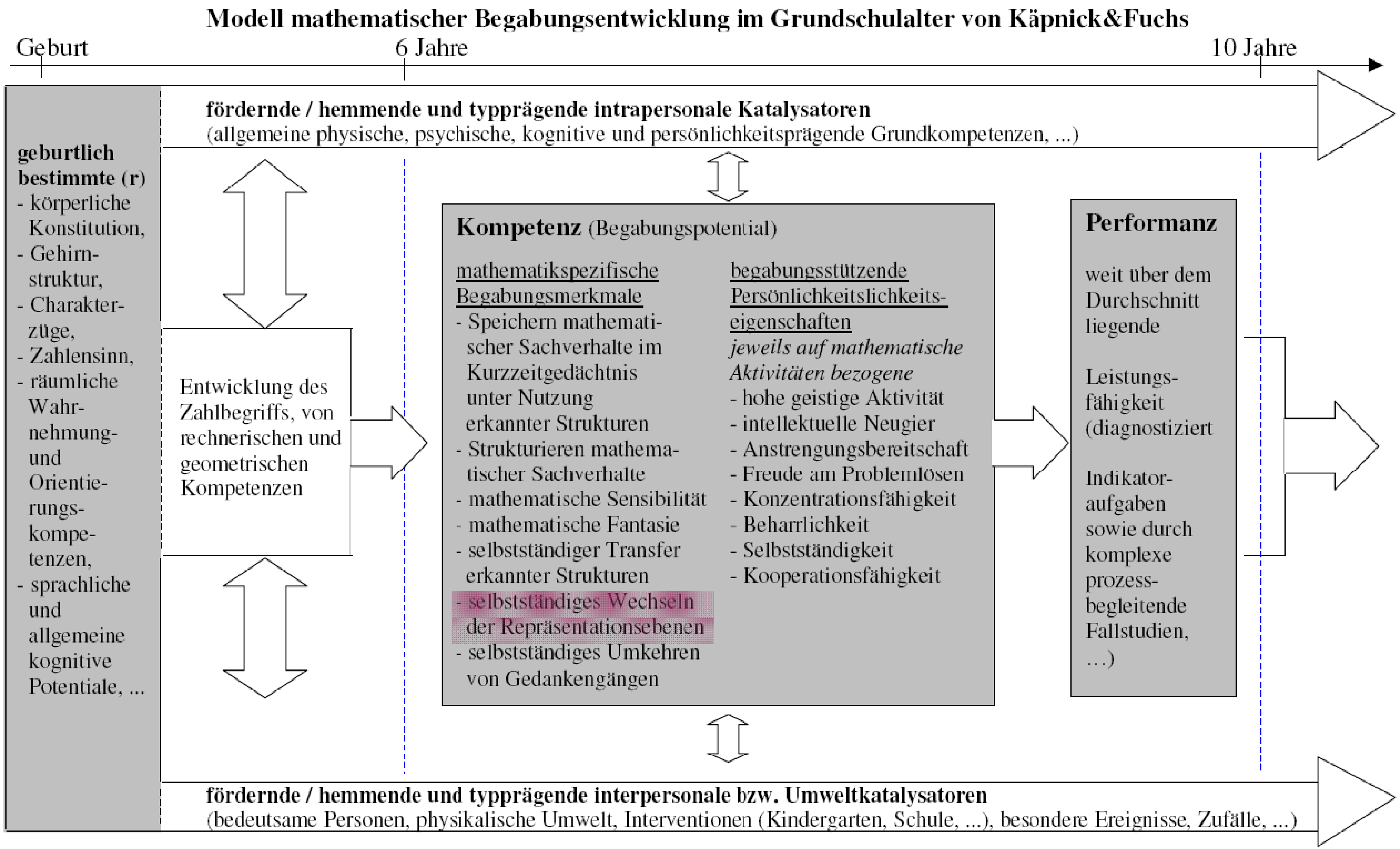
Students who think about mathematical problems in original or innovative ways often display several of the following characteristics. They

- Process information flexibly – switch from computation to visual to symbolic to graphic representations as appropriate in solving problems
- Reverse processes – can switch from a direct to a reverse train of thought
- Have original approaches to problem solving – solve problems in unique ways, try unusual methods
- Strive for mathematical elegance and clarity in explaining reasoning
- Are curious about mathematical connections and relationships – ask "why" and "what if"
- Have energy and persistence in solving difficult problems
- Dig beyond the surface of a problem, continue to explore after the initial problem has been solved

These characteristics may not appear spontaneously and must be nurtured and developed by teachers.

(Sheffield, 2008, p. 30)

Mathematische Begabungen im Grundschulalter



(Käpnick, 2006)

Ist eine Charakterisierung mathematischer Begabungen bei Zweitklässlern möglich? (Aßmus)

Neben begabungsstützenden allgemeinen Persönlichkeitseigenschaften werden folgende Merkmale zur Charakterisierung mathematischer Begabungen bei Zweitklässlern als wichtig angesehen:

- Fähigkeit zum Speichern mathematischer Sachverhalte im Arbeitsgedächtnis unter Nutzung erkannter mathematischer Strukturen
- Fähigkeit zum Erkennen/Konstruieren und Nutzen von mathematischen Strukturen
- Fähigkeiten zu flexiblen Denkprozessen, wie
  - Fähigkeit zum Aufbau verschiedener interner Repräsentationen und zum Umgehen mit unterschiedlichen Repräsentationsformen
  - Angemessenes Umgehen mit Komplexität (Fähigkeit zum gleichzeitigen Berücksichtigen aller notwendigen mathematischen Details)
  - Fähigkeit zum selbstständigen Transfer mathematischer Sachverhalte
  - Fähigkeit zur Reversibilität
- Mathematische Phantasie
- Mathematische Sensibilität
- Räumliches Vorstellungsvermögen (insbesondere Fähigkeit zur mentalen Rotation)

(Aßmus, 2007, S. 249)

- Darstellungs-/Repräsentationswechsel (surface level)

- Repräsentationswechsel (structural level)

Bedeutung: Pädagogische Psychologie

Neben BRUNER (E-I-S) z.B. HASDORF (1976):

Beweglichkeit im Denken (als wichtige Verlaufsqualität geistiger Tätigkeit) zeigt sich in folgenden Formen:

a) Aktives Umformen von Gegebenheiten

b) Reversibilität

c) Wechseln von Annahmen oder Kriterien (… ein Gesichtspunkt hinsichtlich der Erklärungen, Lösungswege, Ordnungsprinzipien usw. wird zielgerichtet verändert …)

d) Erfassen und Anwenden der Relativität

e) Gleichzeitiges Beachten mehrerer Aspekte (… die Ergebnisse verschiedener Aspektbetrachtungen eines Dinges werden zueinander in Beziehung gesetzt bzw. miteinander kombiniert …)

Bedeutung: Pädagogische Psychologie

im Kontext Lernen und Verstehen

E. STERN (1998):

Ausdruck von Lernen: „etwas verstehen“, zeigt sich insbesondere in:

- bewusst erlebten Einsichten

- Ferntransfer

- **Flexibilität in der Repräsentationsform**

J. GREENO (1991):

Verstehen drückt sich in der Fähigkeit aus, **eine Anforderungs-situation auf unterschiedliche Weise unter Beibehaltung der zentralen Aspekte darzustellen**

Bedeutung: (traditionelle) Denkpsychologie

- Die Denkpsychologie sucht nach materialunabhängigen Größen zur Erfassung von Denkleistungen.

- Blick auf den Denk*prozess*:

  Unterscheidung zwischen **kreativem** und rationalem **Denken**

  Kreatives Denken (nach KRAUSE 2000)**:**
  Es muss ein Problem vorliegen und die Lösung muss neuartig sein bezogen auf das Individuum.

Bedeutung: (traditionelle) Denkpsychologie

- Einschub:

Wenn in einem solchen Verständnis neben klassischen Problemarten wie z.B. Bestimmungs-, und Entscheidungsproblemen auch **Entdeckungsprobleme** berücksichtigt werden,

dann zeigt sich kreatives Denken nicht nur im **Lösen**, sondern auch im **Finden** und Variieren von Problemen etc.

Vgl. auch AEBLI (1990): .... Kreativität zeigt sich vor allem darin: Probleme sich selbst stellen, Probleme lösen ...

Vgl. auch LEUDERS (2003): ... heuristische Kreativität, explorative Kreativität ...

Bedeutung: (traditionelle) Denkpsychologie

- Blick auf den ***kreativen Denkprozess***: Gibt es **Basiskomponenten**, die das Denken bzw. Informationsverarbeitungsprozesse (und deren Ausprägung die kognitive Leistungsfähigkeit) maßgeblich determinieren?
- KLIX (1992, 1993) (ähnliches auch bei GUILFORD oder MEILI):

  - Komplexitätsreduktion
  - Analogiebildung
  - multiple Klassifikation
  - **Multimodalität [Doppelrepräsentation]**
  - …

gleichzeitige Nutzung mehrerer [beider] modalitätsspezifischer Repräsentationen beim Bewältigen kognitiver Anforderungen (Wechsel zwischen den Modalitäten)

(traditionelle) Denkpsychologie

Bedeutsamkeit von Multimodalität

- Es ist bekannt, dass eine solche Doppelrepräsentation bzw. das Wechselspiel zwischen den Modalitäten die Leistung in bestimmten Bereichen fördern kann.

Beispiele

- Für das Behalten von Informationen (Ein dargebotenes Wort in Verbindung mit einem Bild wird besser behalten als ein Wort allein. (Engelkamp, 1990))
- beim Denken hinsichtlich technischer Probleme (Spies, 1995; Krause, 1996)

(traditionelle) Denkpsychologie

Multimodalität im Kontext von Begabungsforschung

KLIX (1992) unter Bezugnahme auf HENDRICKSON (1986)

Die Doppelrepräsentation und der Wechsel zwischen beiden Repräsentationsformen könnten einen wesentlichen Hintergrund ***musikalischer*** Begabung bilden.

KRAUSE, SEIDEL u. a. (1999): Übertragung der Doppel-repräsentationshypothese auf **mathematische Sachverhalte**

Hypothese: Unter differentiellem Aspekt werden bei ***mathematisch*** Hochbegabten (zu einem frühen Zeitpunkt) bei der Anforderungs-bewältigung) die Ausbildung einer Doppelrepräsentation bzw. (ein frühzeitiger) Wechsel zwischen den Modalitäten erwartet.

Weitere Argumente aus jüngerer Zeit

Neuere Denkpsychologie

Nutzung neurowissenschaftlicher und bildgebender Verfahren

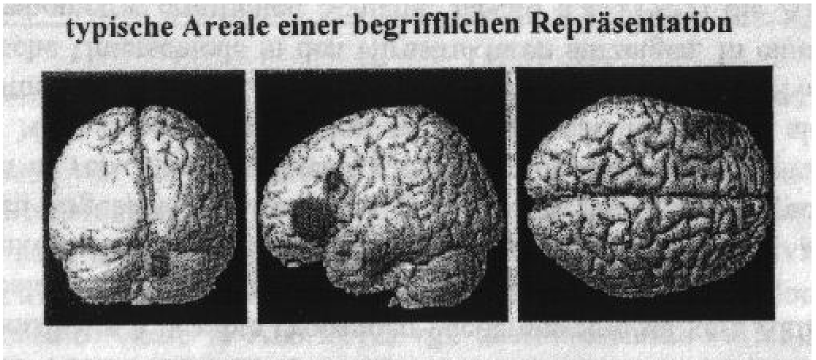
Aktuelle Defizite von Mathematiklernenden

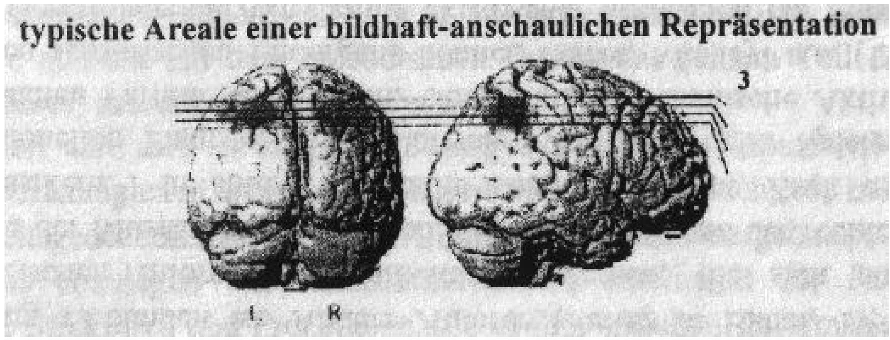
Neuere Denkpsychologie

Die bislang dargestellten Ansätze waren eher **phänomenologisch** orientiert.

Zur Stützung der Aussagen können experimentalpsychologische und neurowissenschaftliche Untersuchungsmethoden Verwendung finden. Sie ermöglichen auch eine „naturwissenschaftliche“ Herangehensweise („Messen“).

- Existenz modalitätsspezifischer Repräsentationen
- topologische Differenzierung zwischen begrifflichen und bildhaft-anschaulichen Repräsentationen





Fallstudie zur Doppelrepräsentationshypothese

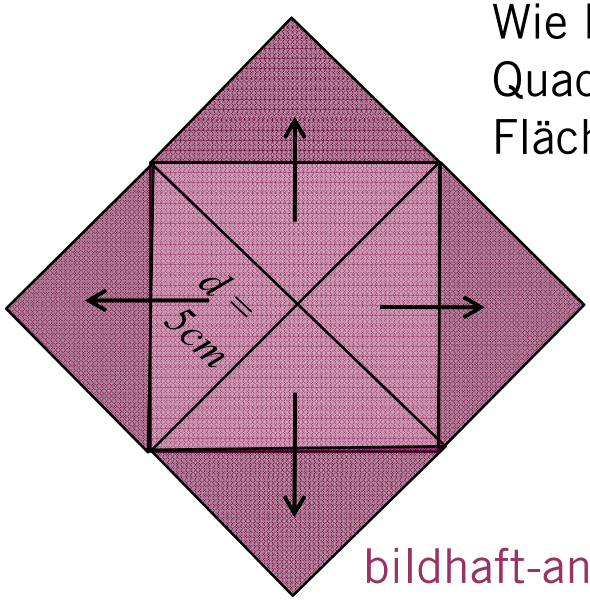
Ausgangspunkt: Doppelrepräsentationshypothese

- Das gleichzeitige Aktivieren beider Modalitäten und der Wechsel zwischen beiden scheinen einen wesentlichen Hintergrund von Begabung zu bilden.
- Bei ***mathematisch*** Hochbegabten wird zu einem frühen Zeitpunkt der Anforderungsbewältigung die Ausbildung einer Doppelrepräsentation bzw. ein frühzeitiger Wechsel zwischen den Modalitäten erwartet.
- Studie von SEIDEL in Zusammenarbeit mit KRAUSE und HEINRICH (2004): *Bauen mathematisch Begabte zur Bewältigung komplexer mathematischer Anforderungen im stärkeren Maße sowohl begriffliche als auch bildhaft anschauliche Repräsentationen auf als Normalbegabte?*

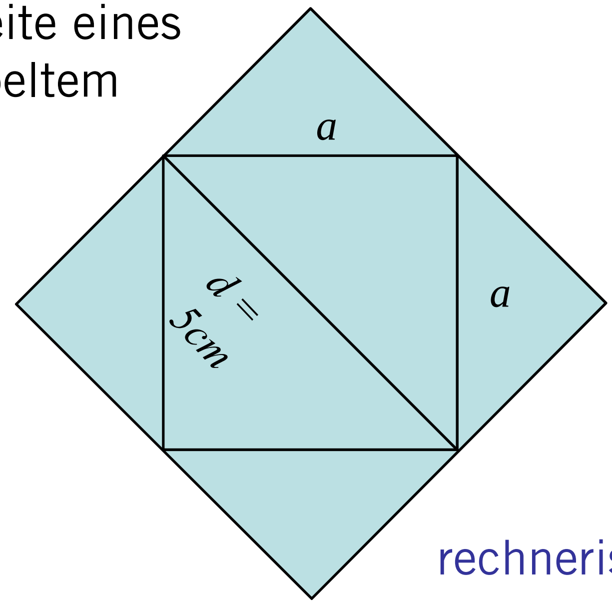
Fallstudie zur Doppelrepräsentationshypothese

- 12 (nach Lehrerurteil) mathematisch begabte und 12 normalbegabte Oberstufenschüler
- Bearbeitung von Problemen, die für die Schülerinnen und Schüler unter Berücksichtigung ihrer Erfahrungen und Vorkenntnisse sowohl algebraisch als auch anschauungsgeometrisch lösbar waren

Wie lang ist die Seite eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt?



bildhaft-anschaulich



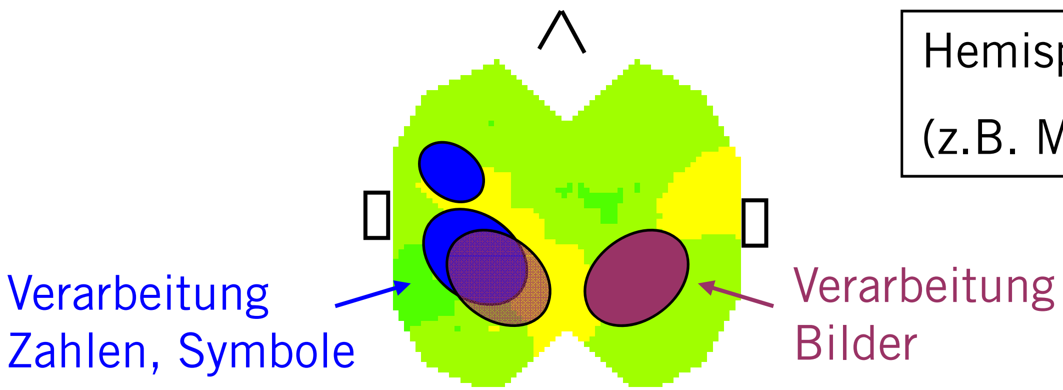
rechnerisch

Fallstudie zur Doppelrepräsentationshypothese

- Erwartungsgemäß zeigten die mathematisch Begabten bessere Leistungen, sie konnten mehr Probleme und diese schneller lösen als die Normalbegabten.
- Allerdings waren die besseren Leistungen durch die traditionellen Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar; bezüglich IQ, Visualisierungsfähigkeit oder Gedächtniskapazität waren Unterschiede zwischen den beiden Versuchspersonengruppen nicht signifikant.
- Unterschiede zeigten sich in den EEG-Aufzeichnungen und -Analysen.

Hemisphären – Theorie

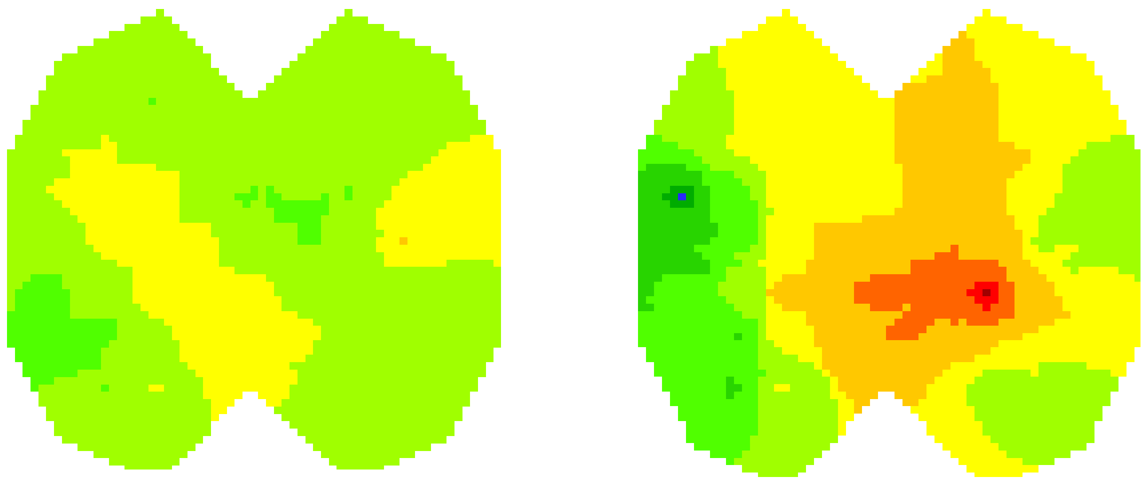
(z.B. Mietzel 1998)



Fallstudie zur Doppelrepräsentationshypothese

Aktivation innerhalb der ersten Sekunde nach Instruktionsverstehen

normalbegabt mathematisch begabt

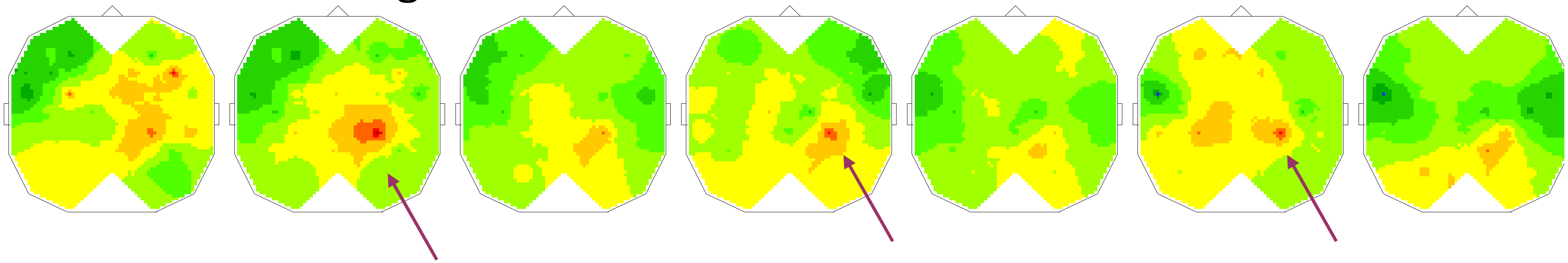


gemittelte Differenzmaps beim Lösen von 2M-Aufgaben

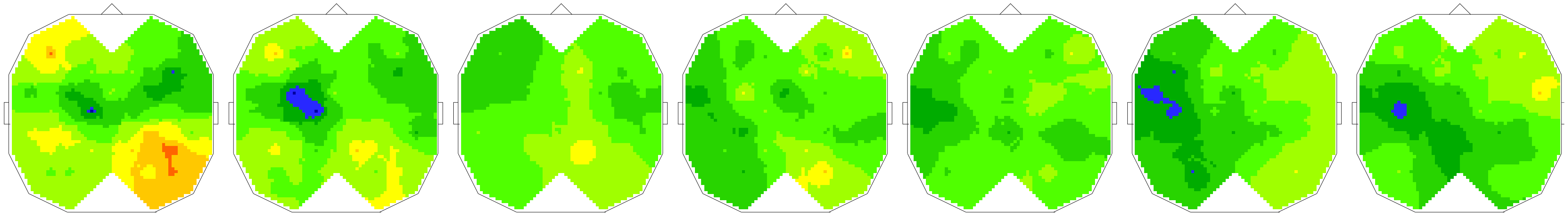
Bei mathematisch Begabten sind jene Hirnregionen aktiviert, die für beide Modalitäten verantwortlich gemacht werden, wohingegen in der Stichprobe der Normalbegabten zu diesem Zeitpunkt noch keine Aktivation in diesen Hirnregionen nachweisbar ist (statistisch signifikant).

Exemplarisch: Wechseln der Modalität innerhalb der ersten 10 Sekunden bei mathematisch Begabten

mathematisch begabt



normal begabt



Fallstudie zur Doppelrepräsentationshypothese

Interpretation:

- Wechselspiel zwischen Rechnen und bildlicher Vorstellung konnte nur kasuistisch gezeigt werden
- Nicht auszuschließen, dass derartige Wechsel bei Normalbegabten zu einem späteren Zeitpunkt eintreten
- Vermutung: verwendete mathematische Anforderungen waren für die Begabtenpopulation zu einfach

BEFUND (unabhängig vom Begabungsbegriff):

Doppelrepräsentation korreliert mit Problemlöseleistung

Aktuelle Defizite von Lernenden

Bezüge:

Grundschulbereich und Sekundarstufenbereich

„Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr“

Aktuelle Defizite von Lernenden

Analysen von Mathematikunterricht:

Grundschulbereich:

... ein eher isoliertes Nebeneinander von Geometrie und Arithmetik ...

(Backe-Neuwald, 1998)

Sekundarstufenbereich:

... Geometrie auf der einen und Arithmetik/Algebra auf der anderen Seite erscheinen den Schülern oftmals nur getrennt ...

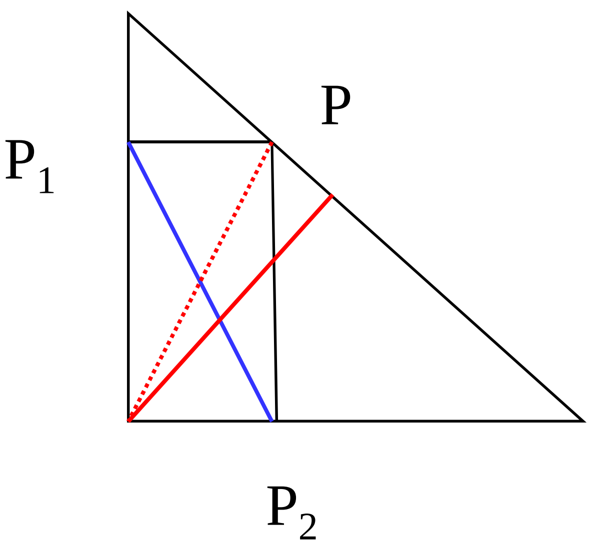
(Zimmermann, 1991)

Defizite

Defizite von Mathematiklernenden:

AMBRUS (2000): Studierende

Auf der Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks bewegt sich ein Punkt P. Wir projezieren ihn senkrecht auf die Katheten und erhalten P_1 und P_2. Wann ist die Strecke P_1P_2 am kürzesten?



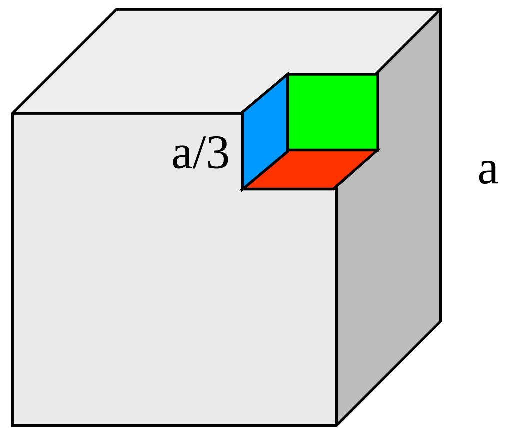
Ca. 93% der Ma – LA - Studierenden haben versucht, ein direktes Verfahren zur Berechnung von P_1P_2 zu finden. (erfordert recht hohen Aufwand!)

kaum Bemühungen erkennbar, [zu wechseln und] auf (anschauungs)-geometrischem Wege eine Lösung zu suchen

Defizite

Defizite von Mathematiklernenden

Wie groß ist der Oberflächeninhalt des Restkörpers, wenn die Seitenlänge des herausgeschnittenen Würfels ein Drittel der Seitenlänge des Ausgangswürfels ausmacht?

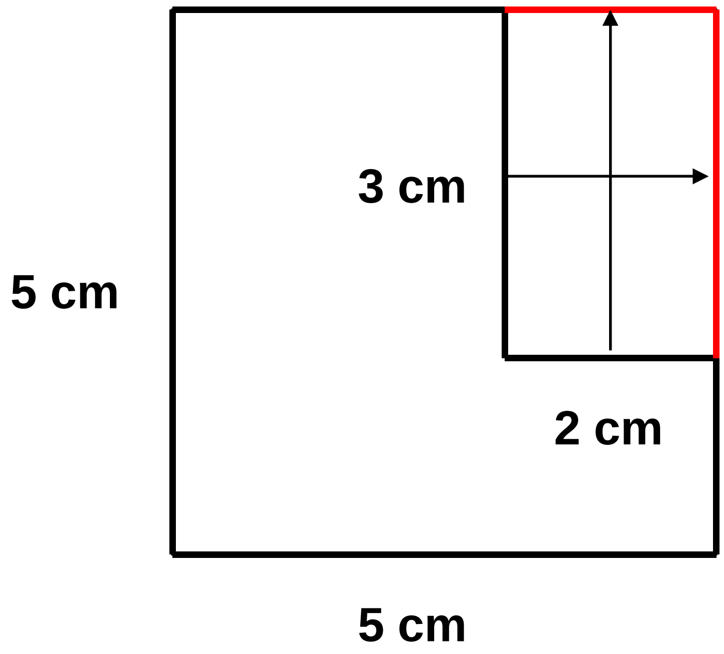


H. SCHUMANN (1987): Realschule

150 Schüler, Kl. 9: nur 17 (Ca. 11%) erkannten und verwendeten die Oberflächeninvarianz beim Lösen des Problems (geometrischer Weg)

Defizite

Defizite von Mathematiklernenden:



In Analogie eine Umfangsbestimmung

HEINRICH (2005): Gesamtschule Kl.5

47 Schüler Gesamtschule Kl. 5: eine Schülerin erkannte die vorteilhafte geometrische Lösungsmöglichkeit

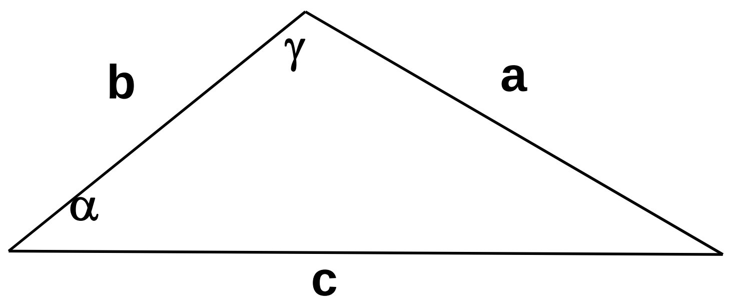
Defizite

Defizite von Mathematiklernenden:

HEINRICH (2003): Sekundarstufen / Studierende

In einem Dreieck gilt: $\gamma = 2\alpha$.

Man zeige: Die drei Seitenlängen a, b, c genügen der Bedingung $c^2 = a\,(a + b)$.

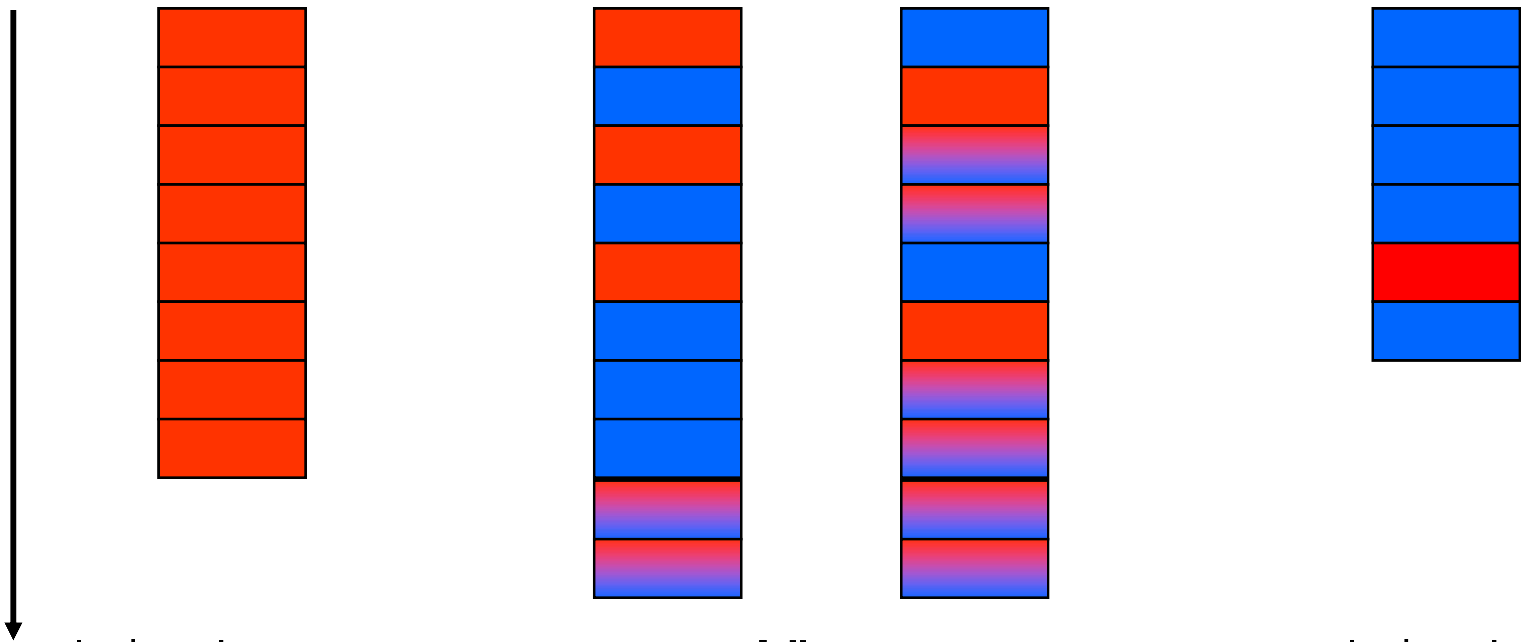


Defizite

Lösungsanläufe, in denen die Arbeit mit Bildern dominiert:
Lösungsanläufe, in denen die Arbeit mit Zahlen / Symbolen dominiert:

4 Lösungsverläufe

I II III IV



keine Lösung **Lösung** keine Lösung

Ein eher „einseitiges Lösungsvorgehen“ erwies sich hier als wenig erfolgreich.

Mögliche Konsequenzen

Mathematikdidaktische Aufgabe:

Entwickeln und Bereitstellen von mathematisch wie pädagogisch geeigneten Lernangeboten, die FRÜHZEITIG (Singer, 1999) auf das Herstellen von Querverbindungen zwischen Geometrie und Arithmetik/Algebra (Bild und Symbol) abzielen

(Mathematikdidaktik als „design science“; Wittmann, 1995)

Zwei Hauptformen von Lernangeboten:

Problemfelder (eher auf Entdecken gerichtet)

und

isolierte Aufgabensachverhalte (eher auf Üben gerichtet)

Praktische Erfahrungen

Problemfelder

- Sternfiguren
- Quadrate puzzeln
- Muster und Zahlen
- Parkette und Zahlenfolgen
- Quadrate teilen

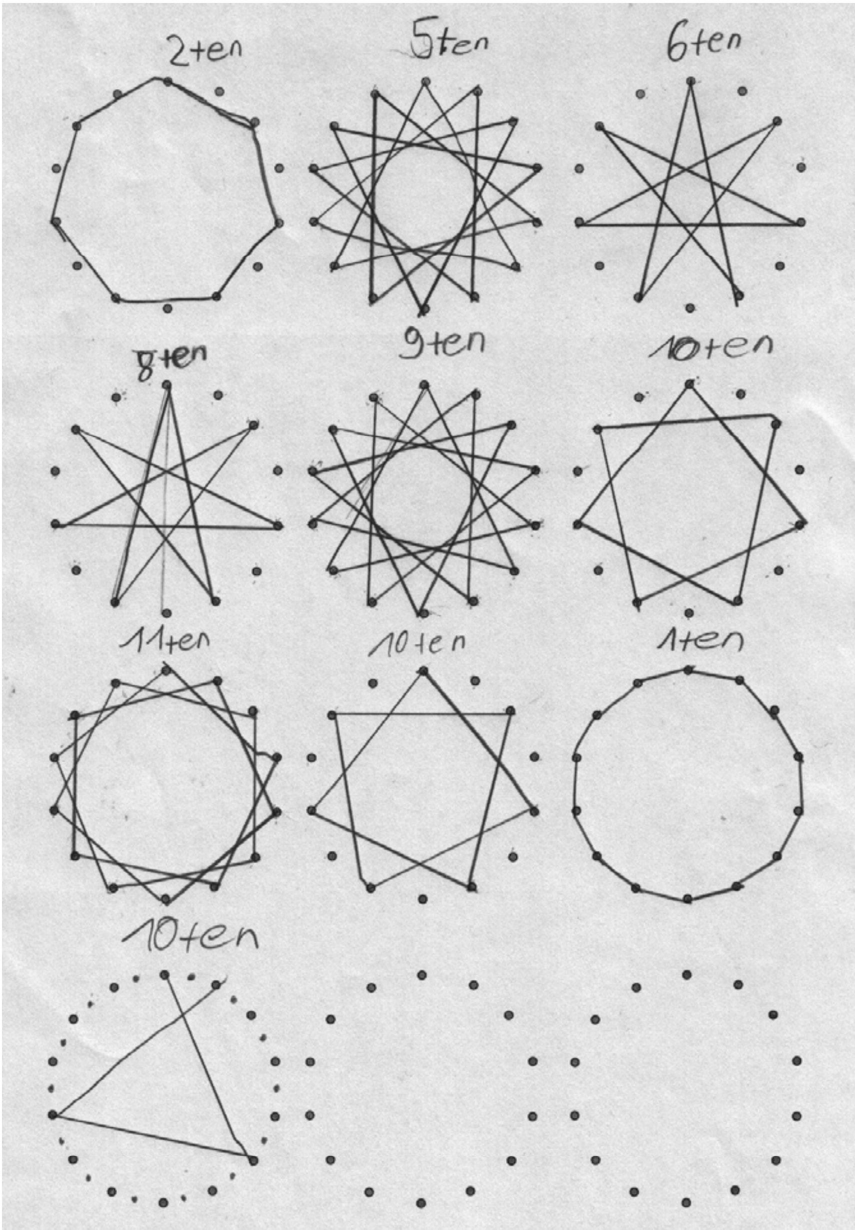
Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit

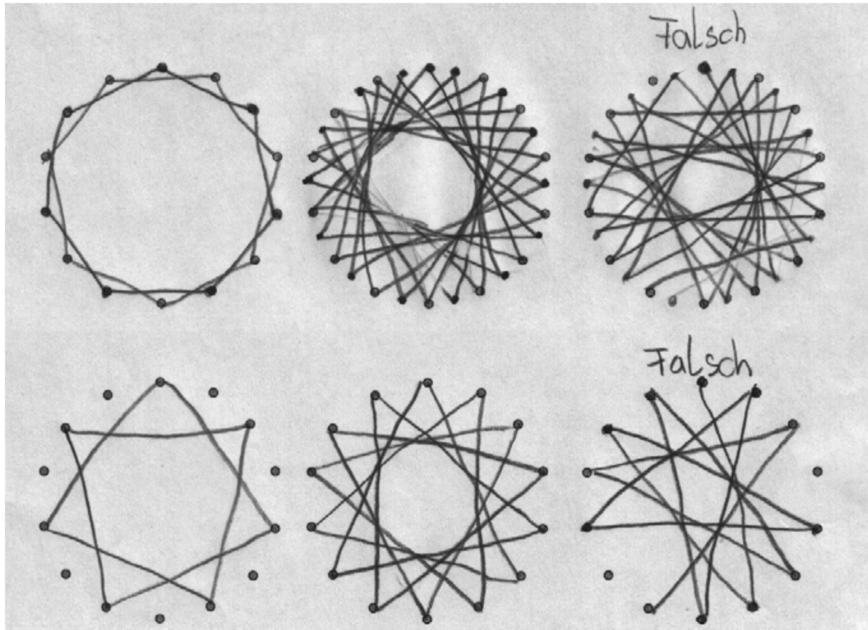
Torsten Fritzlar
(fritzlar@uni.leuphana.de)
&
Frank Heinrich
(f.heinrich@tu-bs.de)

Sternfiguren

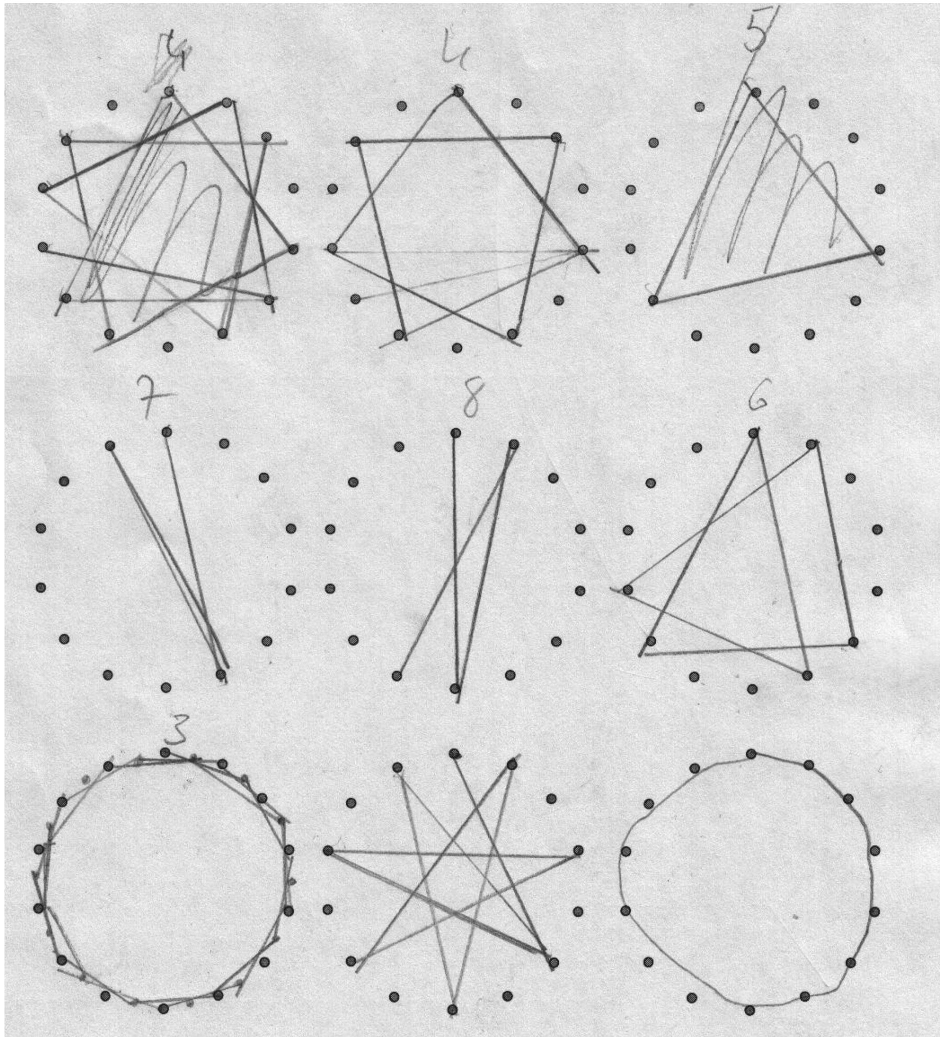
reguläre Klasse des 4. Jahrgangs:

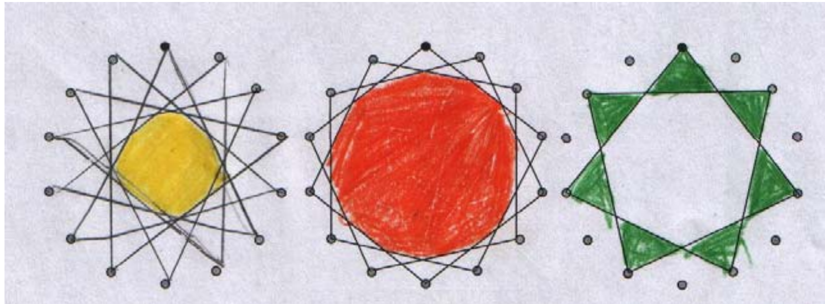
- Figuren der Schrittweiten 3 und 4 werden gemeinsam besprochen.
- Verständnisprobleme scheint es nicht zu geben, vielmehr wollen die SuS sofort weitere Schrittweiten ausprobieren.
- Die meisten SuS arbeiten über die gesamte Unterrichtszeit motiviert an der Problemstellung.





Nur zwei Schüler arbeiten an Kreisen mit anderer Punktezahl.





Einige Schüler scheinen doch überfordert.

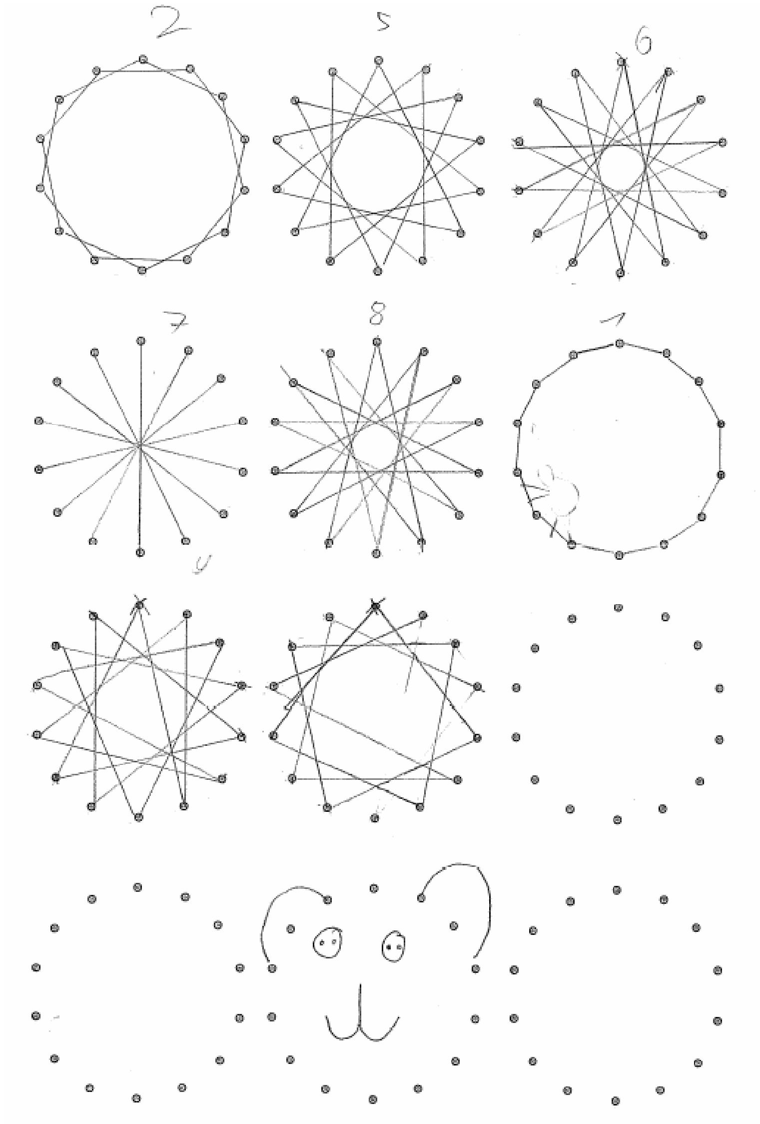
Bei ungeraden Zahlen* bleibt jeder
2. Punkt unbenutzt. Bei geraden Zahlen
wird jeder benutzt.

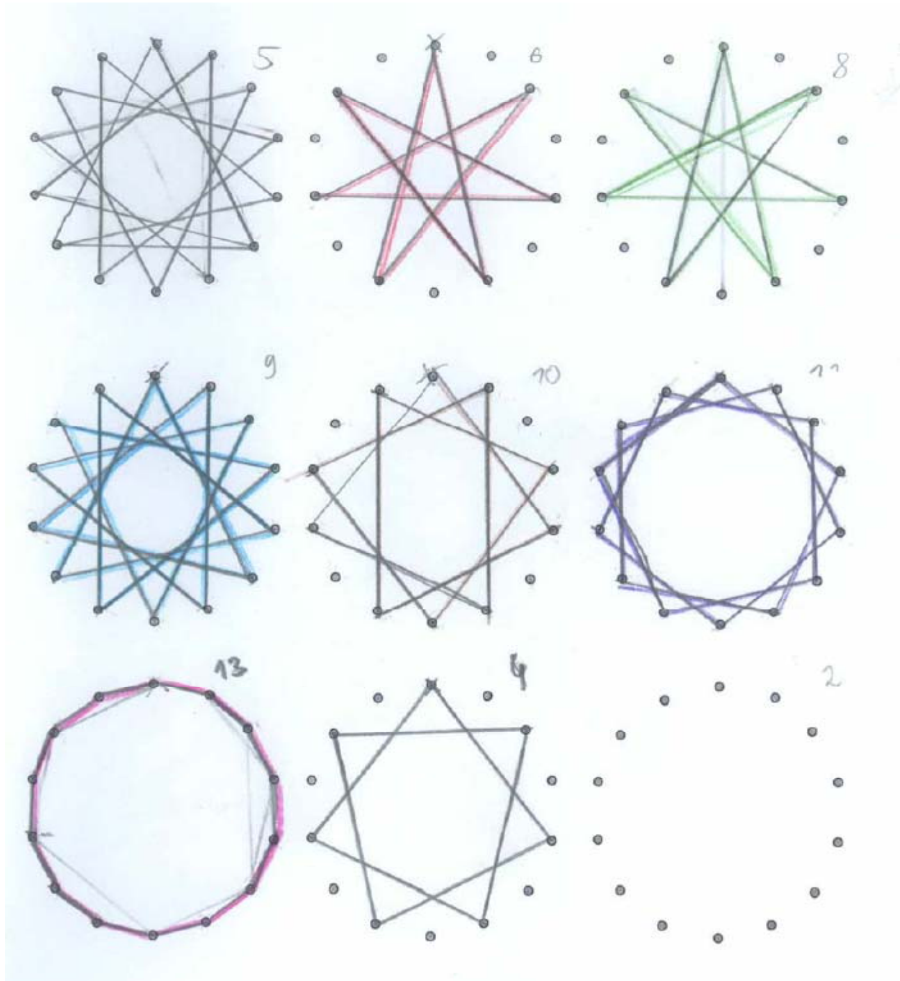
*Außer 7

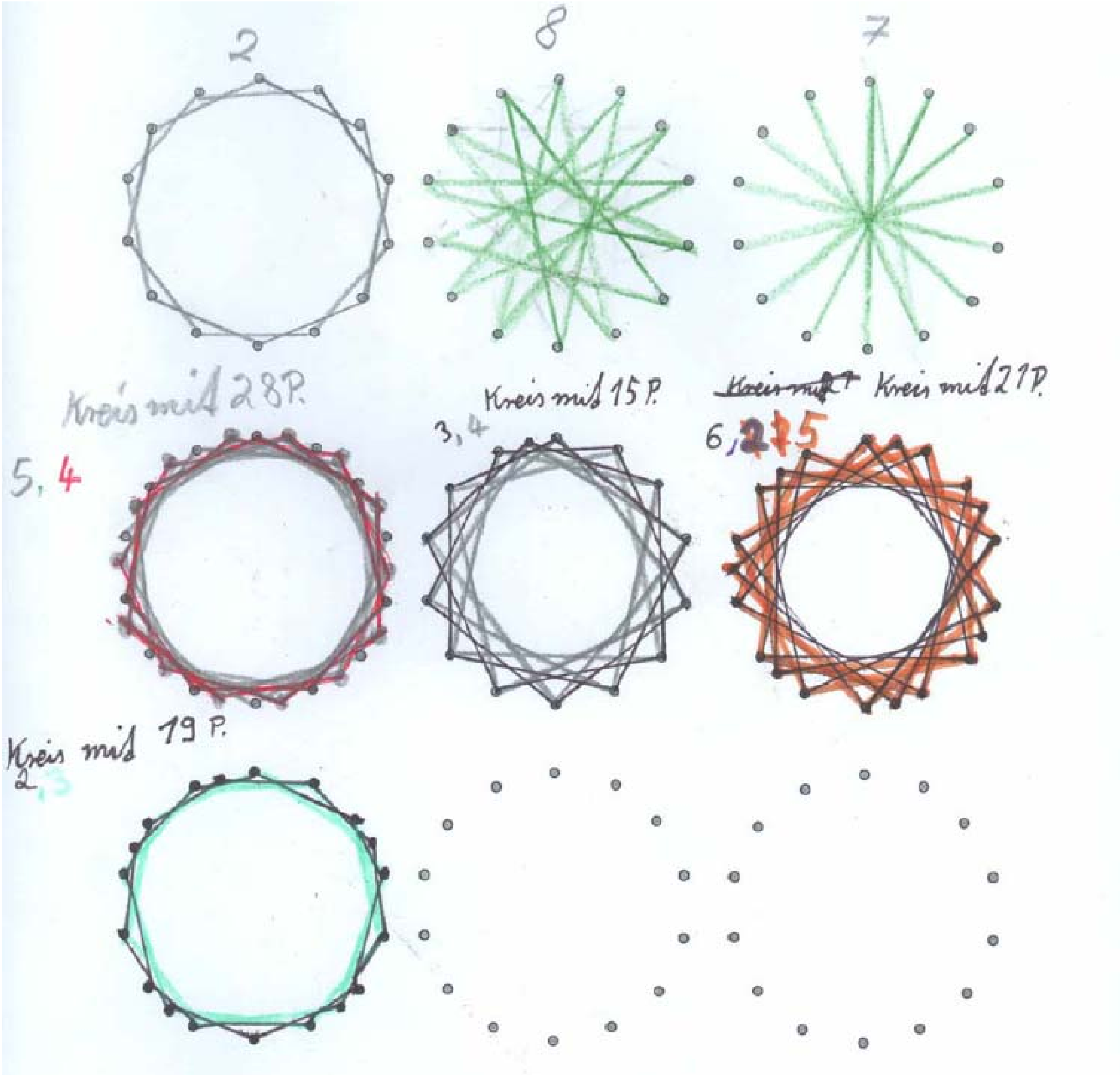
- Für manche SuS ist die Figur der Schrittweite 1 ein Sonderfall.
- Nur Marleen bringt in die Diskussion ein, dass die Figuren mit den Schrittweiten 6 und 8 identisch sind, *denn 8 ist ja 6 rückwärts gezeichnet.*
- Die Schrittweite 15 führt zur selben Figur wie die Schrittweite 1, denn *es ist ja egal, ob man vorher einmal ganz rum geht.*

Fordergruppe Klassenstufe 4:

- Als Einstieg werden die Figuren der Schrittweiten 3 und 4 besprochen, wobei die SuS sofort vorschlagen: *Man könnte auch jeden fünften Punkt verbinden.* *Man könnte auch 28 Punkte in den Kreis malen.*


2
5
6
7
8


5
6
8
9
10
13
4
2


2
8
7
Kreis mit 28 P.
Kreis mit 15 P.
~~Kreis mit~~ Kreis mit 21 P.
5, 4
3, 4
Kreis mit 19 P.
2, 3

- *Bei 7 und allen geraden Zahlen muss man absetzen, weil 7 ein Teil ist.* *Ich habe eine Regel: Was ohne Rest geht, kann man nicht zeichnen.*
- SuS erkennen, dass Figuren gleich sind, wenn sich deren Schrittweiten zu 14 ergänzen.
- *Bei geraden Zahlen im Kreis gehen gerade Zahlen nicht, weil man nie auf die ungeraden Zahlen kommt. Ungerade können gehen, denn da wechseln sich gerade und ungerade ab.*
- Julian: *Vielleicht gehen bei geraden Zahlen ungerade und umgekehrt.*

  Max: *Nein, 6 bei 15 geht nicht.*

gerade Anzahl Punkte: alle ungeraden klappen. Alle ungeraden nicht.
Hälfte klappt nicht.
ungrade Anzahl Punkte: genau andersrum
es gibt keine Hälfte

Statt 14 kann auch eine andere Anzahl von Punkten im Kreis gezeichnet werden. Wie viele verschiedene regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren gibt es dann jeweils?

15 = 7 , 16 = 8 , 17 = 8 , 18 = 9 , 19 = 9 , 20 = 10 us.w.
Punkte k. Sterne

Für welche Anzahlen gibt es besonders viele, für welche besonders wenige regelmäßige, nicht zerfallende Sternfiguren?

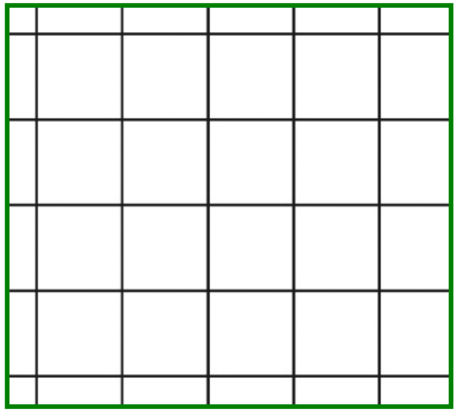
bei gerader Punktanzahl viele regelmäßige S.
bei ungerader Punktanzahl wenige regelmäßige S.

- *Bei 7 geht alles, weil es eine Primzahl ist.*
- *Bei 15 gehen weniger, weil es Teiler gibt.*

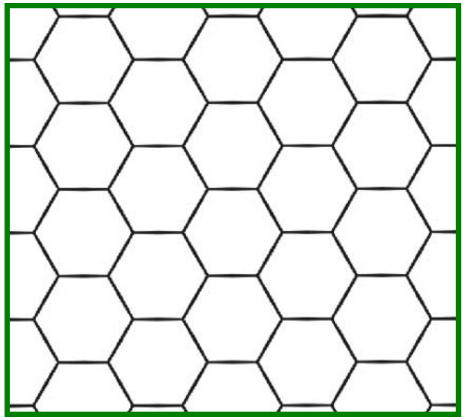
- Insgesamt stellen die SuS fest, dass Sternfiguren zerfallen, wenn die Schrittweite ein Teiler oder der „komplementäre Summand“ zu einem Teiler ist.
- SuS benutzen arithmetische Aspekte, um Ergebnisse zu formulieren, zu diskutieren, auch für die Konstruktion „kritischer Beispiele“, die bisherige Hypothesen widerlegen oder glaubhafter machen können.

Lernvoraussetzung

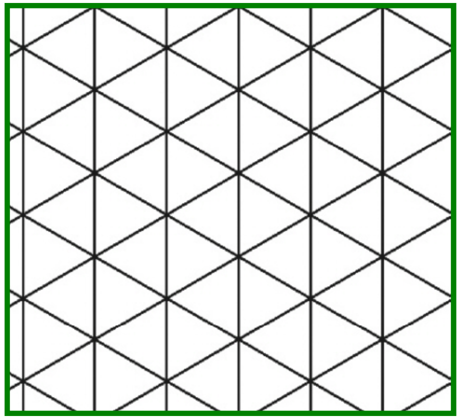
Lernende haben die drei regulären Parkette altersstufengemäß kennen gelernt.



(4, 4, 4, 4)



(6, 6, 6)



(3, 3, 3, 3, 3, 3)

mathematischer Hintergrund

Parkett: vollständige, lückenlose und überlappungsfreie Ausfüllung der (euklidischen) Ebene durch Vielecke

Reguläres Parkett: Parkett, bei dem nur zueinander kongruente regelmäßige Vielecke einer Sorte vorkommen und bei dem jede Ecke „gleichartig“ aufgebaut ist

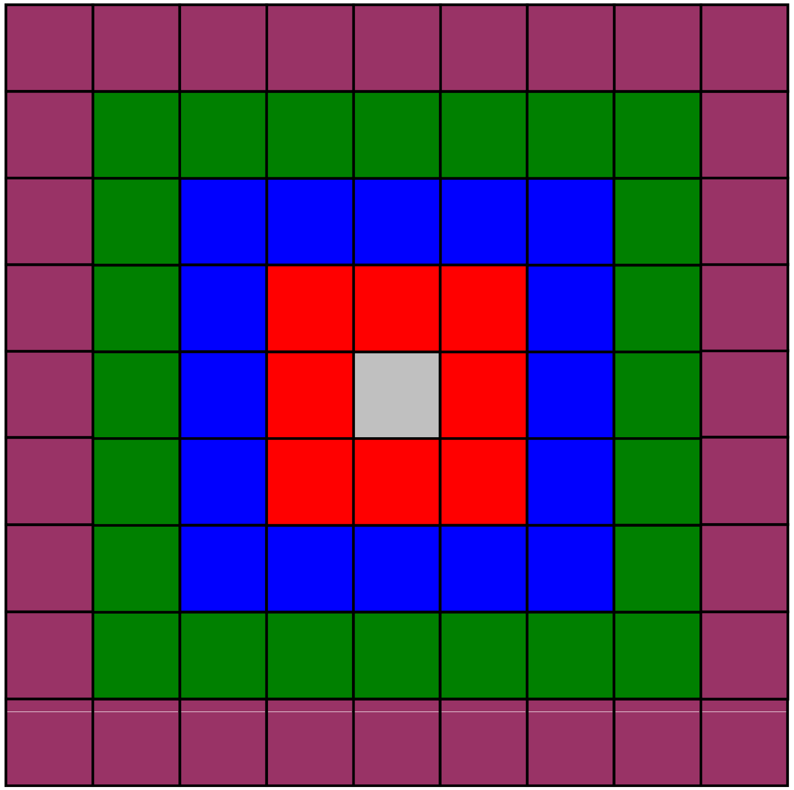
Ausgangssachverhalt

Bilden einer Zahlenfolge

(8, 16, 24, 32, ...)

Zählen der Quadrate (Parkettbauteile) in den einzelnen Ringen

Sukzessives Umschließen eines Quadrates: „Ringbildung“



mögliche Erkenntnis: Zahlenfolge, die mit 8 beginnt und von Glied zu Glied um 8 wächst (Achterfolge)

mathematischer Hintergrund:

arithmetische Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n + 8$

$a_1 = 8$

Potenzen für Begründen und Argumentieren

eine erste Variationsmöglichkeit

analoge Untersuchung der anderen regulären Parkette

(6, 12, 18, 24, ...)

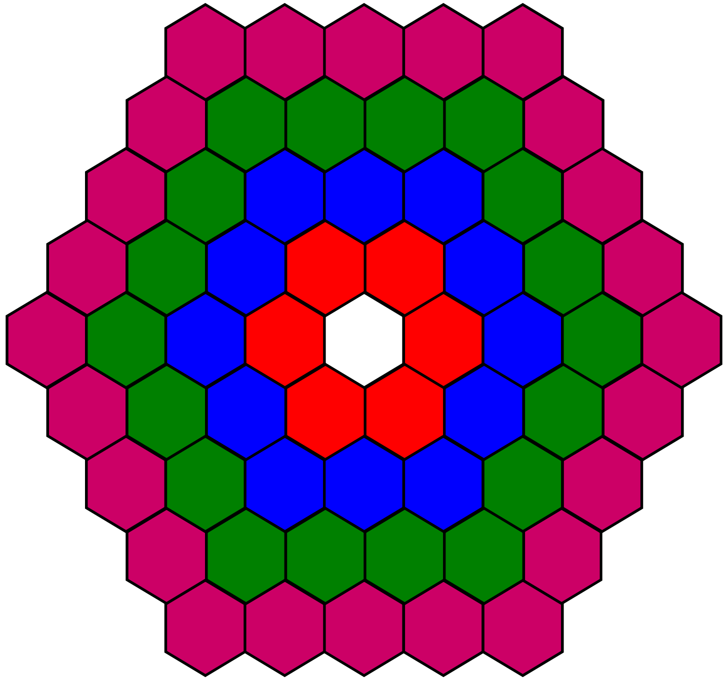
mögliche Erkenntnis: Zahlenfolge, die mit 6 beginnt und von Ring zu Ring um 6 wächst (Sechserfolge)

mathematischer Hintergrund

arithmetische Zahlenfolge

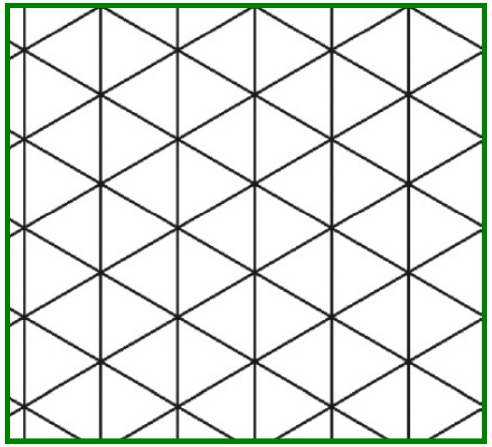
$a_{n+1} = a_n + 6$

$a_1 = 6$



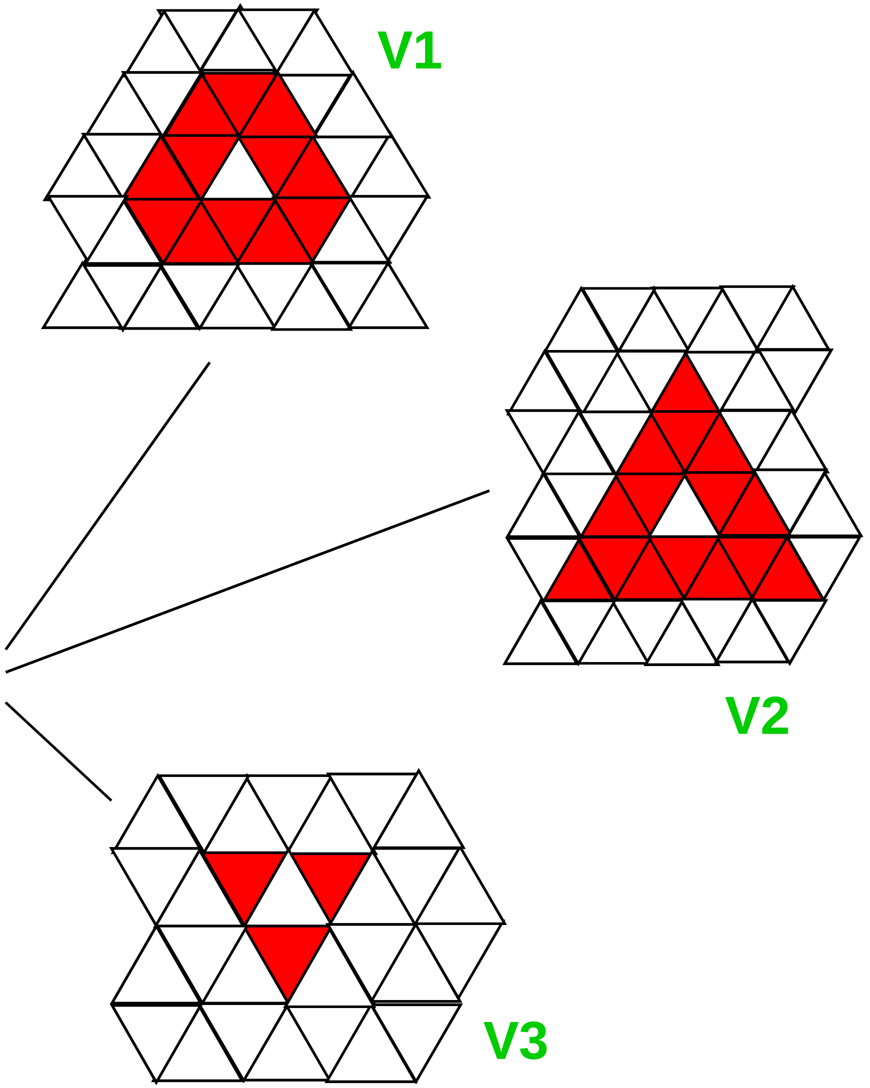
Parkett (6, 6, 6)

Analoge Untersuchung des regulären Parketts (3, 3, 3, 3, 3, 3)



Welche Form haben die Parkettringe?

Wie sieht der erste Parkettring aus?

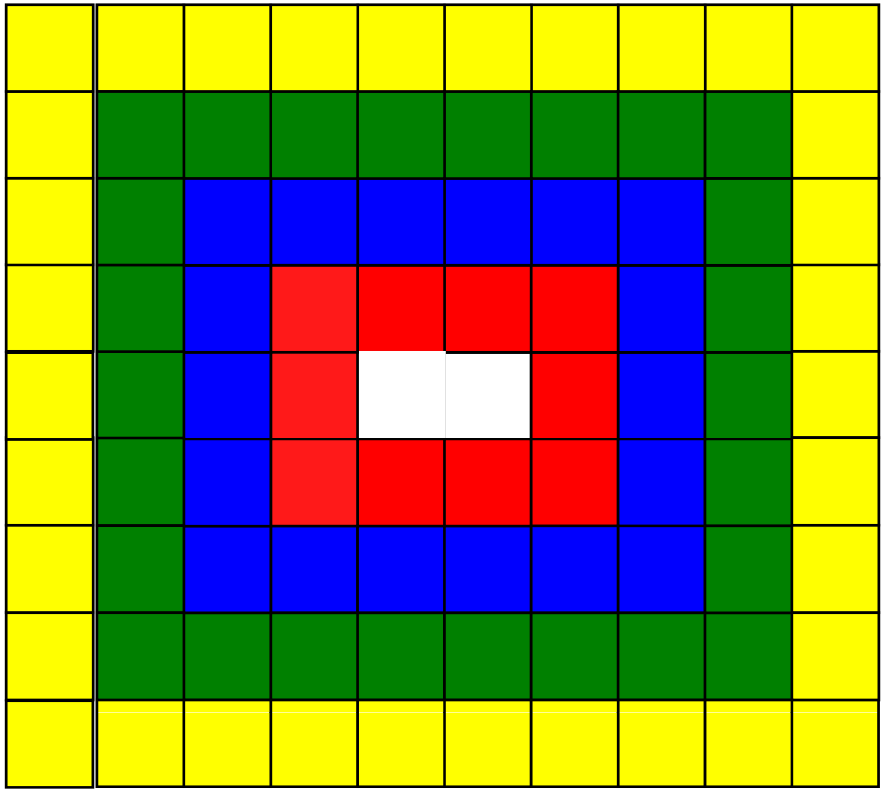


eine zweite Variationsmöglichkeit

analoge Untersuchung im regulären Ausgangsparketts (4, 4, 4, 4), wenn ein anderes Ausgangsbauteil umringt wird

(10, 18, 26, ...)

Zählen der Quadrate (Parkettbauteile) in den einzelnen Ringen



mögliche Erkenntnis: Zahlenfolge, die mit 10 beginnt und von Glied zu Glied um 8 wächst (Achterfolge)

mathematischer Hintergrund:

arithmetische Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n + 8$

$a_1 = 10$

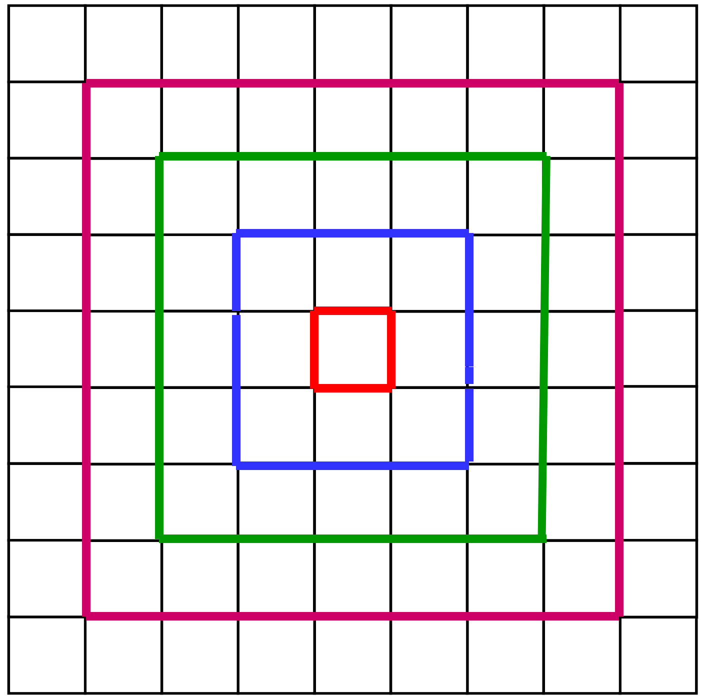
eine dritte Variationsmöglichkeit

analoge Untersuchung anderer Figurationen in den regulären Parketten

Beispiel: reguläres Parkett (4, 4, 4, 4)

Figuration: Parkettbänder

(4, 12, 20, 28 , ...)



mögliche Erkenntnis

Zahlenfolge, die mit 4 beginnt und von Ring zu Ring um 8 wächst

mathematischer Hintergrund

arithmetische Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n + 8$

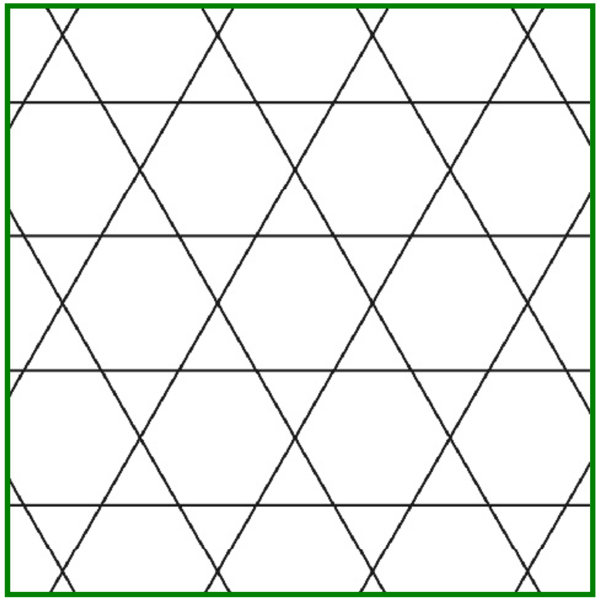
$a_1 = 4$

eine vierte Variationsmöglichkeit

analoge Untersuchungen an anderen (nicht regulären) Parketten
[erfordert Kennenlernen dieser Parkette]

Beispiel: ein archimedisches Parkett,
hier (3, 6, 3, 6)

Ringbildung? Wie?
Zahlenfolgen? Welche?



Fallunterscheidung

Fall 1: Umringen eines Sechsecks

(12, 30, 48, 66...)

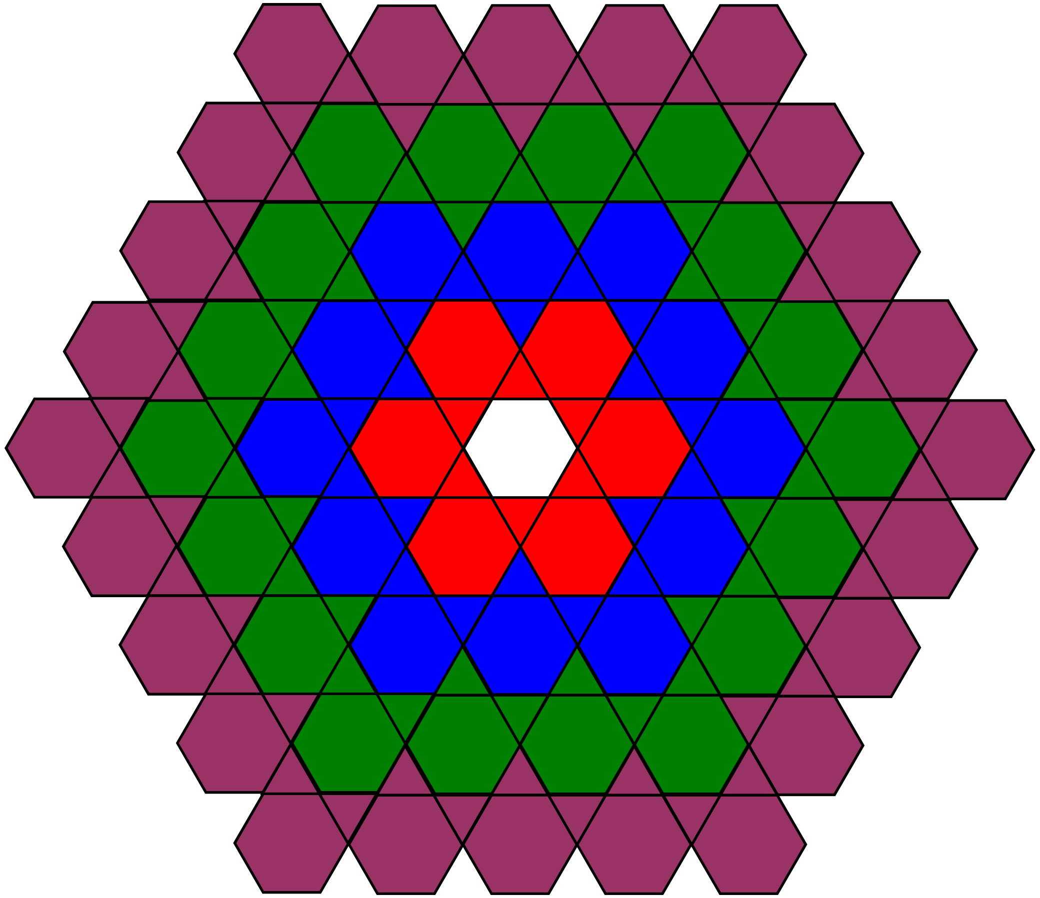
mögliche Erkenntnis Zahlenfolge, die mit 12 beginnt und von Glied zu Glied um 18 wächst

mathematischer Hintergrund

arithmetische Zahlenfolge

$a_{n+1} = a_n + 18$

$a_1 = 12$



Parkett (3, 6, 3, 6)

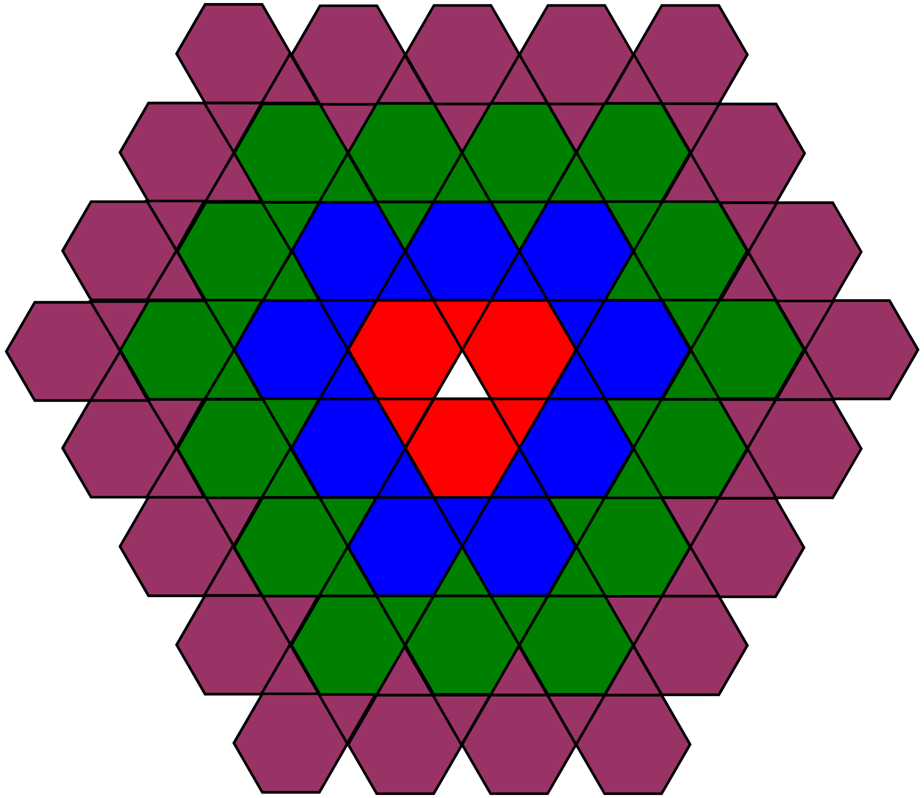
Fall 2: Umringen eines Dreiecks

(6, 18, 39, ...)

mögliche Erkenntnis:

keine Zahlenfolge, bei der die Differenz oder der Quotient zwischen aufeinander folgenden Glieder gleich groß ist

weder arithmetische noch geometrische Zahlenfolge



Parkett (3, 6, 3, 6)

eine fünfte Variationsmöglichkeit

analoge Untersuchungen in anderen Dimensionen (z.B. D = 3)
[erfordert kennen lernen dieser Figuration]

Beispiel: D = 3

Räumliche Entsprechung?
Welcher Art?

Quadrat → **Würfel**

Parkettringe → **Hohlwürfel**

(**26**, **98**, **218**, **386**, **602,** ...)

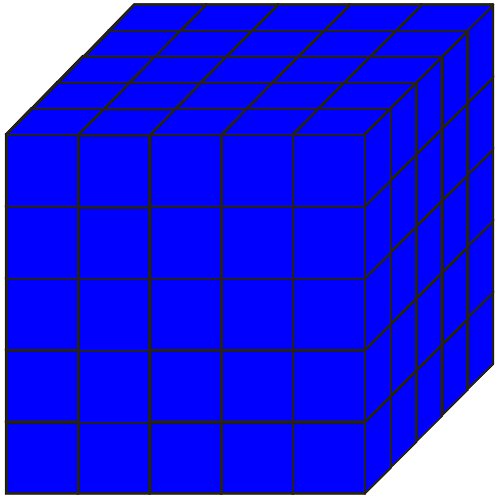
Sukzessives Umschließen eines Würfels durch entsprechende „Hohlwürfel“

mögliche Erkenntnis:

keine Zahlenfolge, bei der die Differenz oder der Quotient zwischen aufeinander folgenden Glieder gleich groß ist

weder arithmetische noch geometrische Zahlenfolge

aber ...

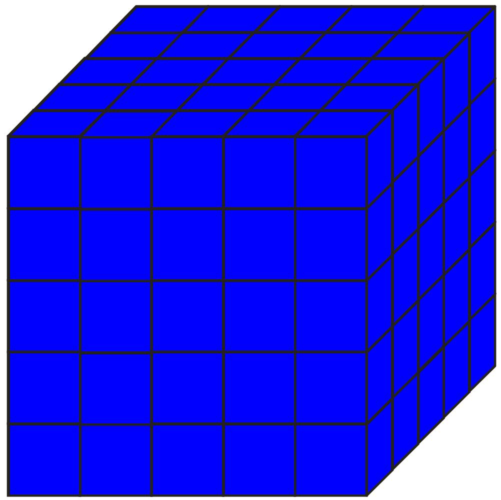


(26, **98**, **218**, **386**, **602,** ...)

(72, 120, 168, 216, ...)...

(48,   48,   48, ...)

Sukzessives Umschließen
eines Würfels durch
entsprechende „Hohlwürfel“

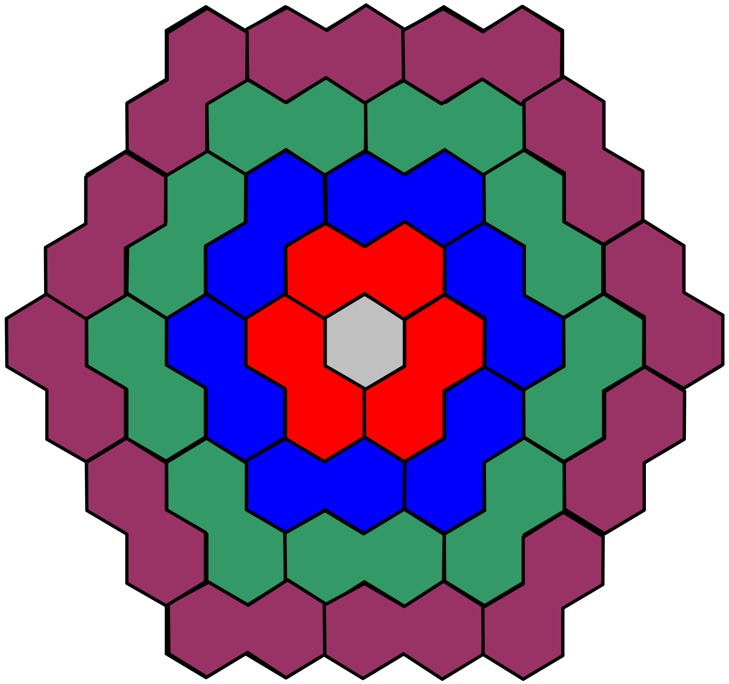


mathematischer Hintergrund

arithmetische Zahlenfolge
zweiter Ordnung

eine weitere Variationsmöglichkeit

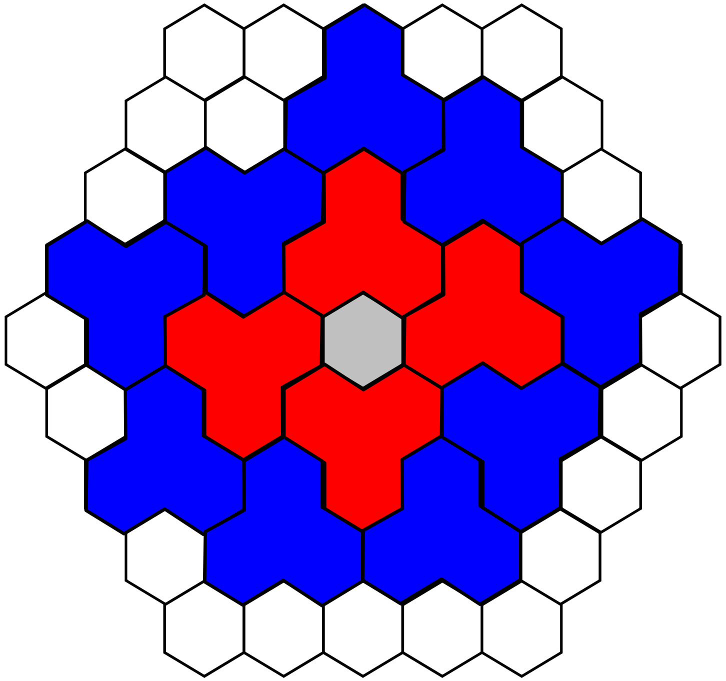
Nun *reversible Aufgabenstellung*: Zahlenfolge → Figuration



Darstellen anderer bekannter Folgen natürlicher Zahlen durch Ringe im Parkett (6, 6, 6), hier DREIERFOLGE

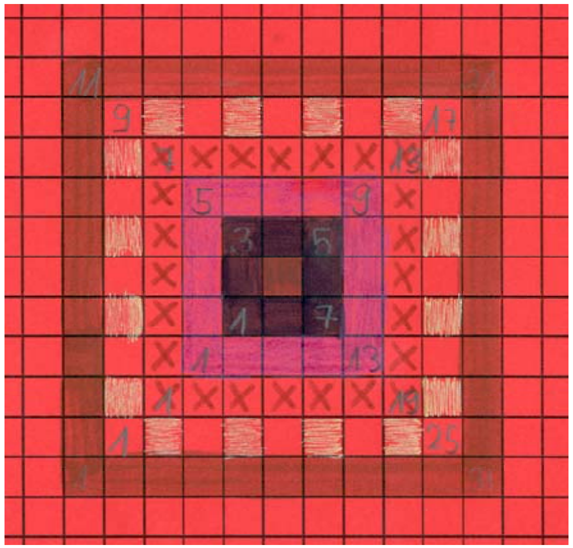
Lässt sich auch die Viererfolge im Parkett (6, 6, 6) entsprechend veranschaulichen?

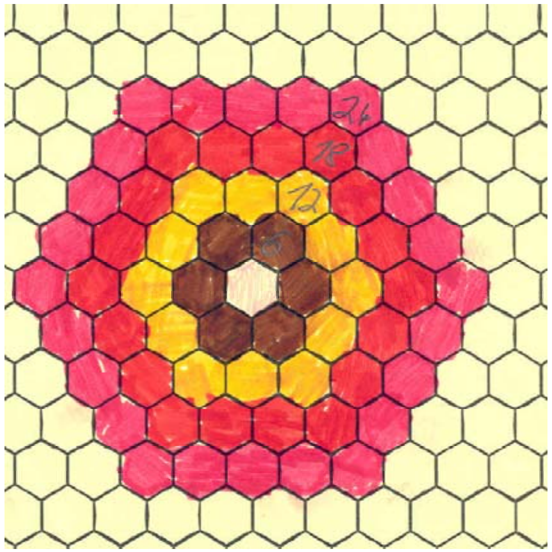
Lässt sich auch die Viererfolge im Parkett (6, 6, 6) entsprechend veranschaulichen?



Verhalten beim Bearbeiten von Aufgaben

Ringbildung geometrisch / Erzeugen der Ringe

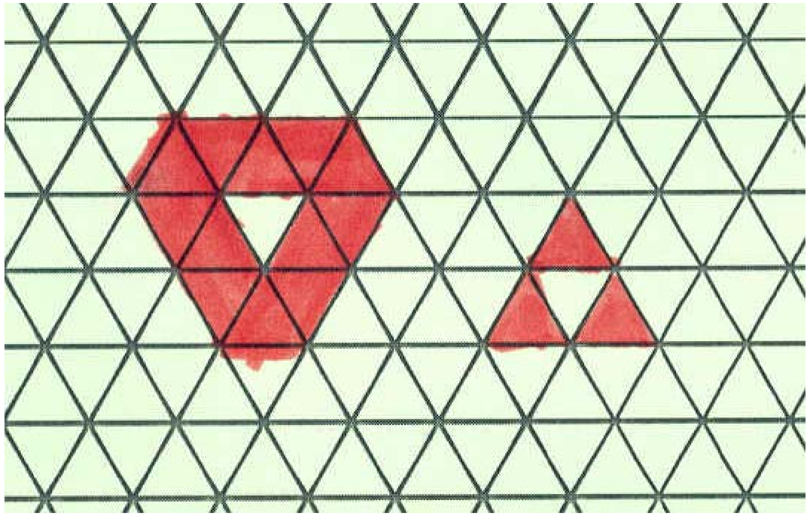




weitgehend problemloses Erkennen und Darstellen von Ringen in den Parketten (4, 4, 4, 4) und (6, 6, 6)

Verhalten beim Bearbeiten von Aufgaben

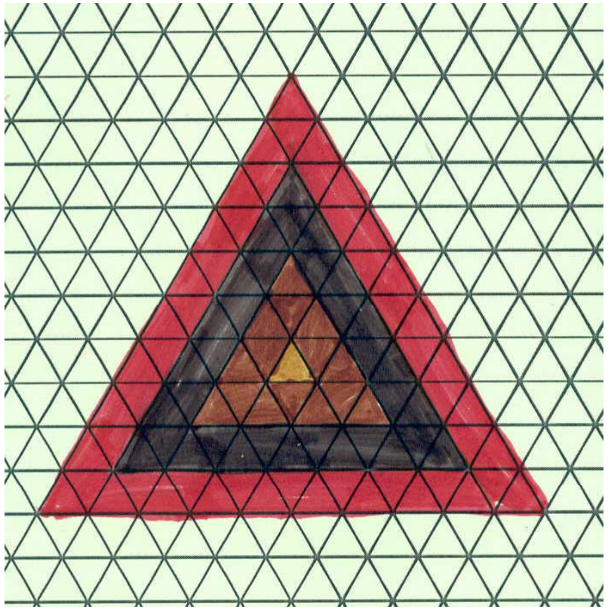
Ringbildung geometrisch / Erzeugen der Ringe

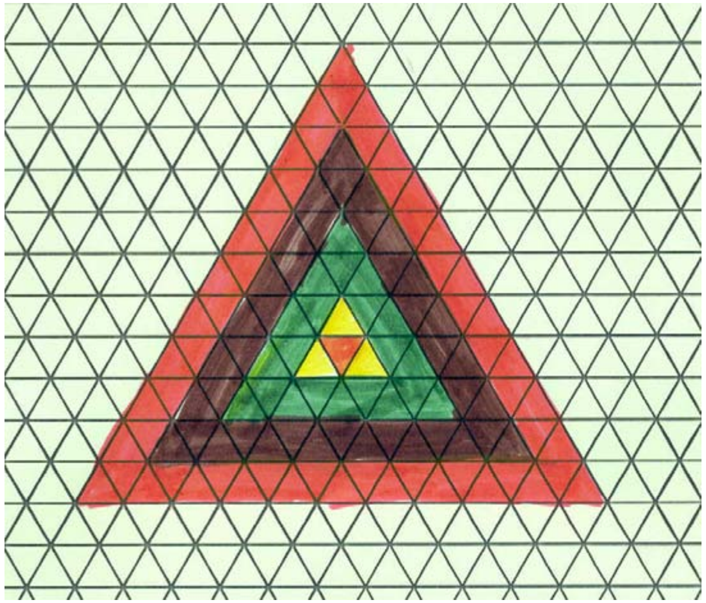


Von einigen Schülern werden sogar gleich zwei mögliche Ringformen für (3, 3, 3, 3, 3, 3) entdeckt (hier für den ersten Ring).

Verhalten beim Bearbeiten von Aufgaben

Ringbildung geometrisch / Erzeugen der Ringe

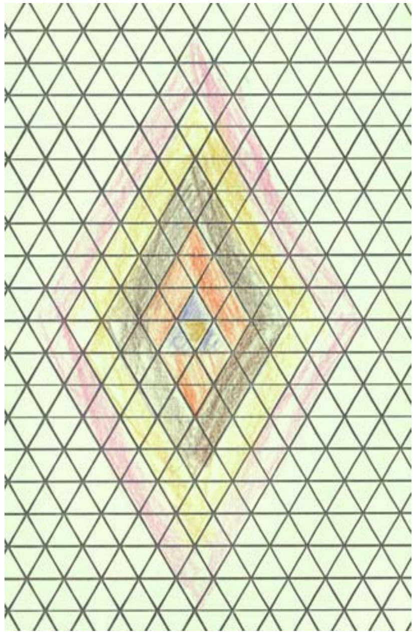


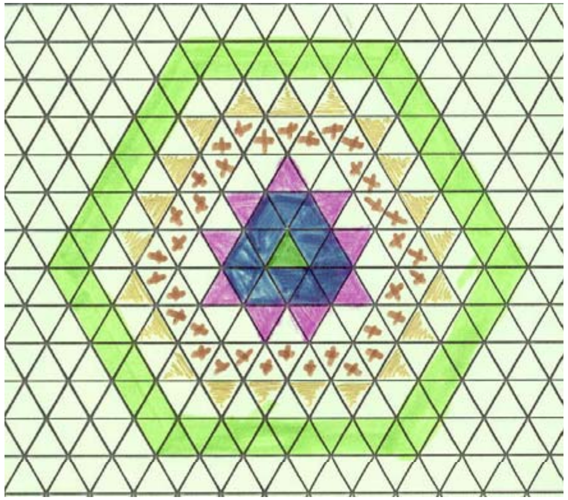


Von einigen Schülern werden gleich zwei mögliche Ringformen für (3, 3, 3, 3, 3, 3) entdeckt und korrekt beibehalten.

Verhalten beim Bearbeiten von Aufgaben

Ringbildung geometrisch / Erzeugen der Ringe



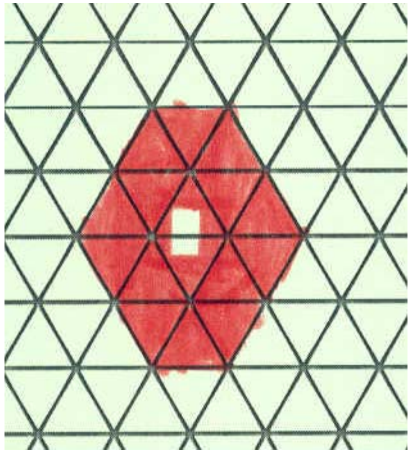


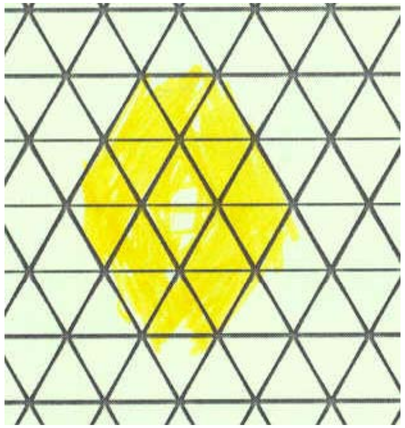
Gewählte Ringform wird von ca. ¼ der Schülern nicht beibehalten

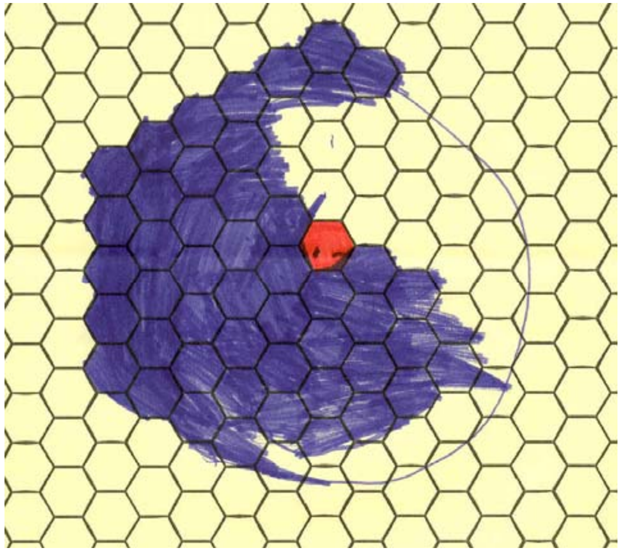
Deutliche Leistungsunterschiede bei der fortlaufenden Ringbildung im Parkett (3, 3, 3, 3, 3, 3)

Verhalten beim Bearbeiten von Aufgaben

Ringbildung geometrisch / Zum Begriff Ring



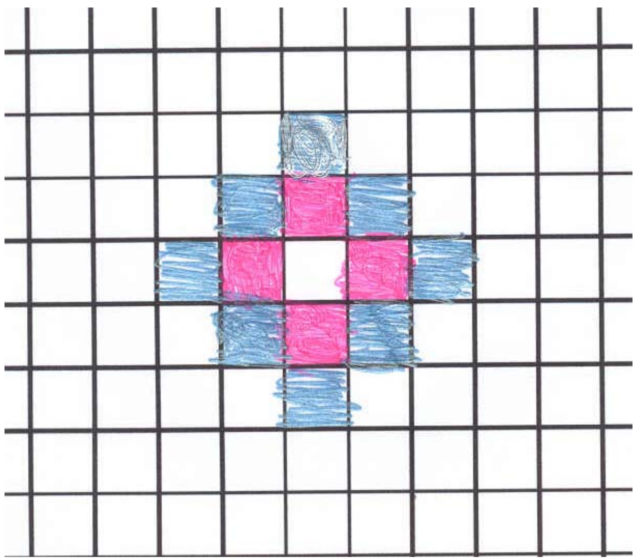




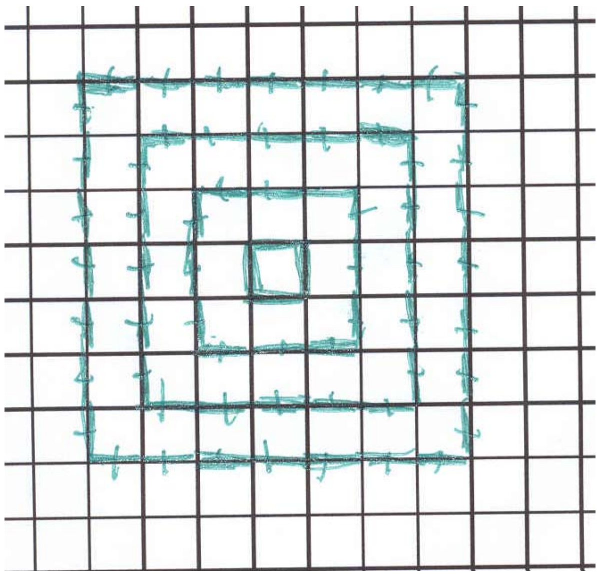
Verhalten beim Finden von Aufgaben

Finden weiterführender Arbeitsrichtungen nach der Ringbildung in den regulären Parketten

Auch hier größere Leistungsunterschiede erkennbar



Andere Ringform im Parkett (4, 4, 4, 4)



Anderes Umgebungsgebilde um (4, 4, 4, 4)

Erkennen arithmetischer Zusammenhänge

Im Parkett (4, 4, 4, 4): „Ach das ist ja die Achterfolge“

Ähnliches Verhalten bei der Entdeckung der Sechserfolge

Den Unterschied zwischen verschiedenen arithmetischen Zahlenfolgen im Parkett (3, 3, 3, 3, 3, 3) erkannten nur ca. ein Drittel der Lernenden ohne Lehrerhilfe

(7, 15, 23, 31, ...)

Unterschied

(3, 6, 9, 12, ...)

Begründen von Ergebnissen

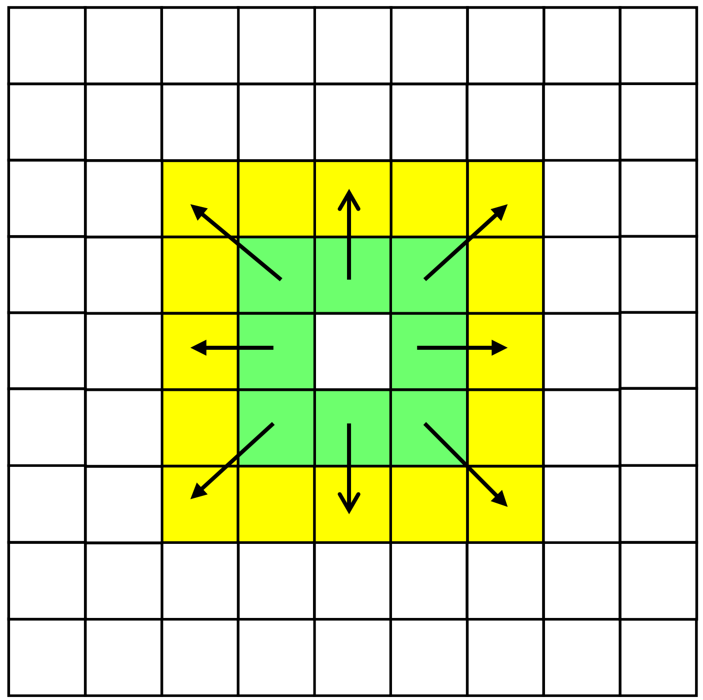
Beweisbedürfnis noch nicht ausgeprägt

Betrifft Parkett (6, 6, 6): „Es ist die Sechserfolge, weil innen ja ein Sechseck ist“

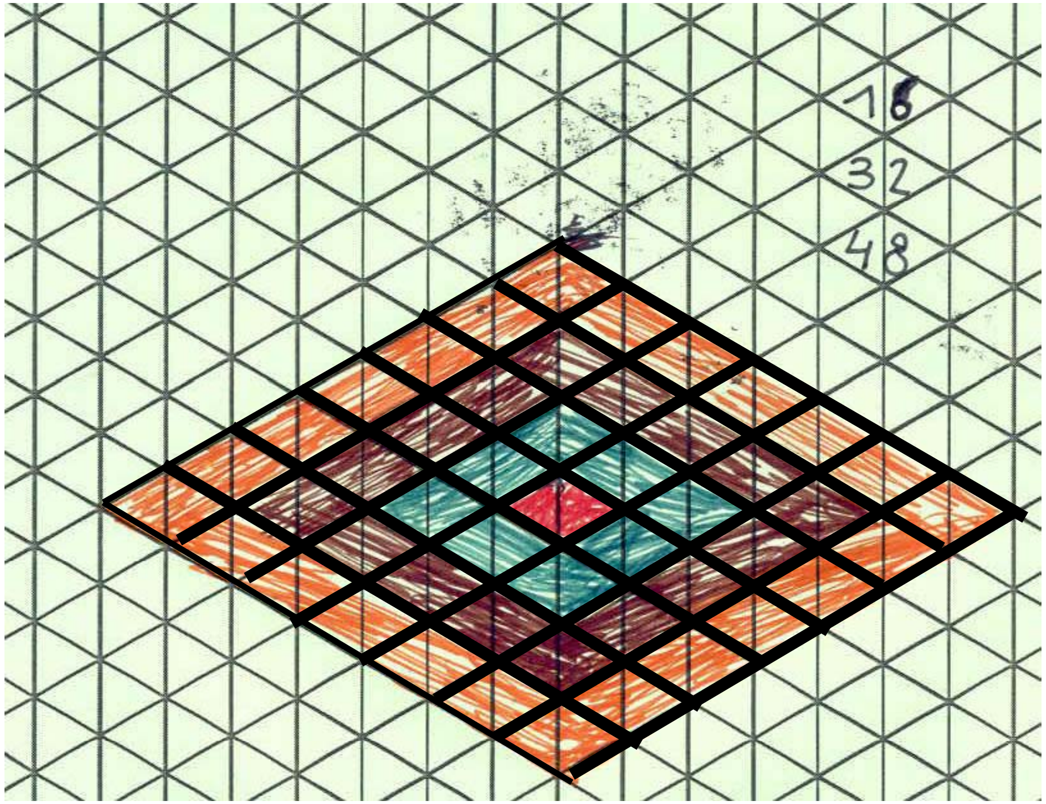
!

Begründen von Ergebnissen

Warum nimmt die Anzahl der Vierecke von Ring zu Ring um 8 zu?



Begründen von Ergebnissen



„Wie vorhin und die Hälfte“