

Torsten Fritzlär, Lenni Haapasalo, Frank Heinrich &
Hartmut Rehlich (Hg.)

Konstruktionsprozesse und Mathematikunterricht

Festschrift für
Prof. Dr. Bernd Zimmermann

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	iii
<i>Ingo Althöfer</i>	
Kleine Chance ist immer: Rot und Schwarz wie Tage und Nächte ... und etwas Grün.....	1
<i>András Ambrus & Éva Vásárhelyi</i>	
Problemlösen in der universitären Lehrerbildung und in der schulischen Allgemeinbildung in Ungarn.....	13
<i>Thomas Bedürftig</i>	
Archimedes, das Kontinuum und der Mathematikunterricht.....	33
<i>Stefan Deschauer</i>	
Algebraische Kostbarkeiten im Rechenbuch von Wolff Habel (Nürnberg 1563).....	59
<i>Hans-Joachim Engel</i>	
Denn sie wissen nicht, was sie tun: Erfahrungen mit Standardverfahren.....	89
<i>Michael Fothe & Gabriele Rosner</i>	
Praxissemester und Vorbereitungsdienst: Was den Unterschied aus der Perspektive einer Fachdidaktik ausmachen kann.....	93
<i>Torsten Fritzlar</i>	
„Das hab‘ ich wirklich an meiner Stunde gemerkt...“: Zur Sensibilisierung von Studierenden für die Komplexität problemorientierten Mathematikunterrichts.....	105
<i>Lenni Haapasalo</i>	
Zoktagon – ein möglicher Einstieg in eine neue Art der Bewertung von Mathematik und Mathematikunterricht.....	129
<i>Lenni Haapasalo & Jozef Hvorecky</i>	
Evaluating the Zoktagon within research standards.....	145
<i>Frank Heinrich</i>	
Problemfelder als Lernräume für die Analogiemethode	153

<i>Friedhelm Käpnick</i>	
Kopfrechnen und mathematische Begabung – Wie passt beides zusammen?.....	169
<i>Karl Kießwetter</i>	
Über die besonderen Probleme beim Aufgabenstellen.....	185
<i>Werner Krause</i>	
Der lange Weg zur Doppelrepräsentation.....	213
<i>Marianne Nolte</i>	
Problemlösen als Weg.....	229
<i>Erkki Pehkonen</i>	
Problemlösen im Mathematikunterricht: Etwa 25 Jahre Deutsch-Finnischer Zusammenarbeit.....	241
<i>Petra Plüch & Gisela Schilpp</i>	
Erinnerung an eine konstruktive Begegnung von Wissenschaft und Schule.....	257
<i>Hartmut Rehlich</i>	
Pólyas Zähleratz: Skizze einer problemorientierten Erarbeitung.....	263
<i>Stephanie Schiemann</i>	
Mein Mathematiklehrer Herr Zimmermann.....	275
<i>Michael Schmitz</i>	
Winkeldreiteilung, Würfelverdopplung und mathematisches Origami.....	281
<i>Fritz Schweiger</i>	
Fundamentale Ideen, Kreativität und Stabilität mathematischen Handelns.....	295
<i>Roland J. K. Stowasser</i>	
Kepler und die Kreisteilung mit Kindern – für den „astronomischen“ Freund.....	305
<i>Kinga Szűcs</i>	
Anriss einer kontrastiven Analyse der ungarischen und deutschen mathematischen Fachsprache.....	321
Verzeichnis der Autorinnen und Autoren.....	339

Dieses Buch ist
Herrn Prof. Dr. Bernd Zimmermann
zu seinem 65. Geburtstag gewidmet.



Die Betonung konstruktiver Aspekte und Prozesse in der Mathematik, in der Mathematikgeschichte und beim Lehren und Lernen von Mathematik ist für Bernd Zimmermann schon immer besonders wichtig. Auch in zahlreichen Beiträgen dieser Festschrift werden sie von Kollegen und Freunden aufgegriffen.

Ingo Althöfer geht in seinem Beitrag zum einen der Frage nach, ob sich vielleicht doch eine Gewinnstrategie für das Roulettespiel konstruieren lässt, zum anderen berichtet er, wie erfahrene „Spieler“ kleine, beispielsweise durch Gebrauchsspuren bei Roulettekesseln entstehende Chancen nutzen, um zum Teil ganz erhebliche Geldbeträge zu „gewinnen“.

„*Pólyas Zählansatz – Skizze einer problemorientierten Erarbeitung*“ von *Hartmut Rehlich* soll den Leser auf anschauliche und unterhaltsame Art mit einem schönen Satz aus Pólyas Zähltheorie vertraut machen. Dargestellt wird eine Gedankenkette vom Gewährwerden eines sehr allgemeinen Zählproblems bis zu seiner überraschend einfachen Lösung. Dabei werden – ganz im Sinne Pólyas – viele Möglichkeiten einer aktiven und problemlöseorientierten Beteiligung der Lernenden an diesem Prozess aufgezeigt.

Michael Schmitz entwickelt in seinem Beitrag eine reichhaltige Vernetzung der schon den griechischen Geometern bekannten Möglichkeiten, durch zusätzliche „Konstruktionswerkzeuge“ wie Einschiebelineal und Winkelhaken zum Ziel zu gelangen, mit zur Lösung geeigneten Papierfaltungen. So wird z.B. bei der Papierfaltung zur Winkeldreiteilung auf einen „Einschiebevorgang“, der auch bei der Archimedischen Lösung zentral ist, aufmerksam gemacht und dann gezeigt, wie aus dieser Papierfaltung heraus wiederum ein weiteres neues Zeicheninstrument zur Winkeldreiteilung, der

sogenannte „Tomahawk“ konstruiert werden kann. Der geometrische Beziehungsreichtum und die vielfältigen Experimentiermöglichkeiten für Schüler zeigen, dass in dieser Art der thematischen Annäherung an ein historisches Thema viel Potenzial für spielerischen problem- und handlungsorientierten Geometrieunterricht steckt.

Stefan Deschauer stellt in seinem Beitrag aus einem von dem Rechenmeister Wolff Hobel 1563 veröffentlichten Rechenbüchlein 25 knifflige und zugleich reizvolle Textaufgaben vor. Die von Hobel überwiegend verschwiegenen Lösungswege werden vom Autor vollständig aufgezeigt, eine Kurzanalyse dieser Aufgaben beschließt den Beitrag.

Mit Vorstellungen zum Kontinuum setzt sich *Thomas Bedürftig* in seinem Beitrag auseinander. Dabei geht er zunächst auf Arbeiten von Archimedes ein – denen sich auch Bernd Zimmermann in seiner Habilitationsschrift gewidmet hat –, anschließend werden dessen Vorstellungen mit heutigen verglichen, die ganz anders, trotz jahrhundertlanger Entwicklung aber auch noch mit Transzendenzen verbunden sind. Schließlich widmet sich der Autor auch der Behandlung des Kontinuums bzw. der Einführung der reellen Zahlen im heutigen Mathematikunterricht, der glaubt, den Schülerinnen und Schülern die Denkrevolution im Zusammenhang mit dem Kontinuum nicht zumuten zu können, damit aber auch wichtige Details, gar die Notwendigkeit der Konstruktion von \mathbb{R} verschleiert und die historische Entwicklung auf den Kopf stellt.

In den letzten Jahren ist ein wohl noch nicht abgeschlossener Modetrend zu einer technokratischen Testwalze und unreflektierter Testgläubigkeit zu erkennen, deren Nivellierungsdruck zunehmend die professionelle und detailsensible Bildungsarbeit an Schulen und Universitäten bedroht. Man sollte sich und andere nicht ins Bockshorn jagen lassen, sondern diesen Umtrieben lieber Elemente eines redlicher durchdachten Bildungskonzepts entgegensetzen. *Karl Kießwetter* beleuchtet in seinem Beitrag – ausgehend von einer bekannten PISA-Aufgabe – das komplexe Beziehungsgeflecht von mathematischen, psychologischen, kommunikationstheoretischen und sozialen Bezügen, in das jede Aufgabenstellung (als Versprachlichung einer Aufgabenidee) eingebunden ist und das höchste Beachtung verlangt, wenn die Reaktionen der Bearbeiter eine einigermaßen plausible Deutung zulassen sollen. Die Entwicklung der sehr grundlegenden Gedanken geschieht dabei am roten Faden einer sukzessiven Verbesserung der ungenü-

genden Beispielaufgabe (bis hin zu einer Eintrittsaufgabe für ein offenes Problemfeld), ohne damit den Anspruch zu verbinden, alle angesprochenen Probleme simultan lösen zu können. Die im Artikel entwickelten vier Regeln für das Gestalten von Aufgaben sind keine „rezeptartige Checkliste“, sie weisen auf notwendige Achtsamkeiten hin und helfen dabei, verschiedene wesentliche Aspekte bei der Formulierung von Aufgaben bewusst zu berücksichtigen. Schließlich bewahren sie – ganz im sokratischen Sinne – auch davor, sich leichtfertig exaktes relevantes Wissen dort einzubilden, wo es eben nicht zu finden ist.

Standardverfahren sind ein zweiseitiges Schwert. Einerseits vermitteln sie vielen Schülern die unbedingt nötige Sicherheit bei einfachen Grundfertigkeiten, andererseits bergen sie das Risiko, dass durch allzu häufiges bequemes und gedankenloses Abarbeiten keine neuen Sinnzusammenhänge konstruiert werden und alte sogar verlorengehen. Von dem damit verbundenen Dilemma bei der Unterrichtsplanung und Unterrichtsführung handelt der Beitrag von *Hans-Joachim Engel*. Darin wird anhand einiger inhaltlicher Beispiele aus der Arithmetik dargestellt, welche Verstehens- und Könnensdefizite ein zu frühes Ablösen der lokalen semantischen Betrachtung und Bearbeitung durch allgemeine sichere algorithmische Rechenrezepte erzeugen kann.

Mit Möglichkeiten, Potenzialen und auch Grenzen des mathematischen Problemlösens im Grundschulalter setzt sich der Beitrag von *Marianne Nolte* auseinander. An verschiedenen Beispielen zeigt die Autorin, dass problemlösendes Arbeiten auch in heterogenen Schülergruppen möglich ist und Problemlösen sich im Sinne Bernd Zimmermanns in erster Linie durch das Bearbeiten von Problemen lernen lässt.

Frank Heinrich erinnert in seinem Artikel zunächst daran, dass es beim Lösen eines (mathematischen) Problems häufig hilfreich ist, sich an einen schon bekannten Lösungsweg zu erinnern und zu versuchen, das damalige Vorgehen nutzbringend auf die neue Situation zu übertragen. Im Weiteren diskutiert er exemplarisch das Potenzial von Problemfeldern, um ein solches Finden einer Lösung nach dem Muster einer bekannten Vorgehensweise anzuregen und zu fördern.

Die Förderung von Problemlösefähigkeiten bei Schülerinnen und Schülern ist zumindest gemäß entsprechender Curricula ein Schwerpunkt des ungari-

schen Mathematikunterrichts, damit zusammenhängend hat die Problemorientierung auch in der Lehrerbildung einen hohen Stellenwert. Nach einem kurzen Überblick über den derzeitigen Aufbau der Mathematiklehrerbildung an der Eötvös-Loránd-Universität Budapest stellen *András Ambrus* und *Éva Vásárhelyi* in ihrem Beitrag einige mathematische Probleme vor, die für eine Erhebung der Lernvoraussetzungen bei Studienanfängern genutzt werden. Außerdem präsentieren die Autoren Ergebnisse einer Befragung ungarischer Mathematiklehrer zum Problemlösen im Mathematikunterricht, aus denen sich erste Eindrücke über die Unterrichtsrealität und auch über zugrunde liegende Vorstellungen zu problemorientiertem Mathematikunterricht gewinnen lassen.

Um derartige Vorstellungen geht es auch im Beitrag von *Torsten Fritzlär*. Er berichtet von einer praxisorientierten Lehrveranstaltung an der Universität Halle-Wittenberg, mit der zum einen versucht wurde, Vorstellungen von Studierenden zu problemorientiertem Mathematikunterricht zu erkunden. Zum anderen sollten mit diesem Projektseminar zumindest Ausschnitte der Komplexität von (problemorientiertem) Mathematikunterricht für die Teilnehmerinnen erlebbar und der Reflexion zugänglich gemacht werden, um sie für diese Komplexität, damit zusammenhängende Anforderungen, Chancen und Grenzen ein Stückweit zu sensibilisieren.

Mit den Vorstellungen von Mathematik und Mathematikunterricht bei Studierenden und Schülern und mit deren Veränderbarkeit beschäftigt sich der Beitrag von *Lenni Haapasalo*. Für entsprechende Analysen nutzt der Autor das Oktagon acht fundamentaler mathematischer Tätigkeiten, das von Bernd Zimmermann insbesondere auch auf der Grundlage seiner mathematikhistorischen Arbeiten entwickelt wurde.

Das Zimmermannsche Oktagon wird auch von *Fritz Schweiger* aufgegriffen, der in seinem Beitrag den Begriff der Fundamentalen Idee herausarbeitet und an ausführlichen Beispielen aufzeigt, welche Schwierigkeiten bei dessen Anwendung in der Mathematik entstehen können.

Mit dem „Praxissemester“ behandeln *Michael Fothe* und *Gabriele Rosner* ein weiteres Element der Lehrerbildung, das erst vor wenigen Jahren in Thüringen eingeführt wurde. Ihr Anliegen ist insbesondere eine fruchtbare Verbindung von universitärer Ausbildung, verkürztem Vorbereitungsdienst und Praxissemester, wobei letzteres eine inhaltliche Eigenständigkeit wahr-

ren sollte. Als Schwerpunkt der Praxisphase schlagen die Autoren deshalb die Auseinandersetzung mit Entwurfsmustern für Lernprozesse vor.

In seinem Artikel blickt *Werner Krause* im Rahmen menschlicher Informationsverarbeitung auf die Problemlöseforschung zurück und ordnet Untersuchungen des Jubilars darin ein. Er widmet sich in diesem Kontext externen Handlungen, internen Repräsentationen sowie deren Zusammenhängen. Abschließend wagt er einen Blick in die Zukunft, die darin bestehen kann, dass es gelingt, Beschreibung und Förderung kreativen Denkens auf so genannte Basiskomponenten des Denkens zurückzuführen.

Friedhelm Käpnick geht der interessanten Frage nach, ob und wenn ja, welche Zusammenhänge zwischen speziellen Kopfrechenfähigkeiten und einer besonderen mathematischen Begabung existieren. Im Kern seiner Ausführungen geht es um vergleichende Analysen zwischen so genanntem substanziellen Kopfrechen (unter besonderer Bezugnahme auf die Rechenleistungen und –techniken des mehrfachen Kopfrechenweltmeisters G. Mittring) und der mathematisch–produktiven Tätigkeit von mathematisch Begabten. Überlegungen zur möglichen Einbeziehung substanziellen Kopfrechnens in Projekte zur Förderung mathematisch interessierter bzw. begabter Kinder beenden den Aufsatz.

Mit Potenzialen eines zweisprachigen Mathematikunterrichts setzt sich der Beitrag von *Kinga Szűcs* auseinander. Die Autorin geht darin beispielsweise der Frage nach, inwieweit die Verwendung sowohl der ungarischen als auch der deutschen Sprache Lernenden helfen kann, passende Vorstellungen zu mathematischen Begriffen zu konstruieren.

Weitere Beiträge in dieser Festschrift sind stärker persönlicher Natur und erlauben es dem Leser, sich ein facettenreiches Bild der Persönlichkeit des Jubilars zu schaffen. So gratuliert *Roland Stowasser* einem Freund, indem er ein spannendes mathematisches Abenteuer mit seinen Enkelkindern berichtet und dabei ein gemeinsames Lieblingsthema weiterspinnet. *Stephanie Schiemann* ist eine ehemalige Schülerin von Bernd Zimmermann, die sich sehr gern an ihren damaligen Mathematiklehrer und seinen Unterricht erinnert. Viele Jahre später durften *Petra Plüch* und *Gisela Schilpp* Herrn Zimmermann als engagierten, unvoreingenommenen und stets neugierigen Hochschullehrer und Kollegen in Jena kennenlernen. Die Beiträge von *Lenni Haapasalo* und *Jozef Hvorecky* sowie von *Erkki Pehkonen* setzen

sich schließlich insbesondere mit ausgewählten wissenschaftlichen Arbeiten des Jubilars auseinander.

Um dem interessierten Leser die Konstruktion weiterer, vielleicht überraschender Querverbindungen zu ermöglichen, wurden die Beiträge *nicht* thematisch geordnet.

Die Herausgeber möchten sich bei allen Autorinnen und Autoren sowie für die sorgfältige Durchsicht des Manuskripts bei Frau Linda Fritz (Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg) bedanken. Unser besonderer Dank gilt dem Schulbuchverlag Westermann und der Friedrich-Schiller-Universität Jena – insbesondere Herrn Prof. Dr. Michael Fothe –, ohne deren finanzielle Unterstützung eine Festschrift in dieser Form nicht möglich gewesen wäre.

Torsten Fritzlär, Lenni Haapasalo, Frank Heinrich und Hartmut Rehlich