Torsten Fritzlar
März 2013

Mathematische Begabungen
im jungen Schulalter

Hauptvortrag auf der 47. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik

Begabung

„Begabung“ ist ein vielfältig verwendeter, ein schillernder Begriff. Er gehört wie beispielsweise auch „Intelligenz“ oder „Kreativität“ zu den sogenannten hypothetischen Konstrukten, die nicht unmittelbar beobachtbar sind und lediglich aus Wirkungen und Folgen erschlossen werden können. Die Definition eines derartigen Konstrukts ist dann natürlich stark abhängig von rahmenden Theorien, oft zusätzlich beeinflusst von kulturellen Eigenheiten, historischen Entwicklungen oder so etwas wie „Zeitgeist“, auch wenn man sich dessen nicht immer bewusst ist. So geht es auch dem Konstrukt „Begabung“, für das ich an dieser Stelle zunächst lediglich einen sehr knappen Rückblick in seine Geschichte wagen will.

Heidrun Stöger (2009) unterscheidet für diese drei Phasen. Während der ersten, der *theologischen Phase* wurde eine Begabung als Geschenk einer höheren Macht, auch Begabte wurden zum Teil als übernatürlich angesehen. Sowohl Platon als auch Konfuzius galten Begabte als „Himmelskinder“ und auch Paulus schrieb in einem Brief an die römische Gemeinde: „Wir haben unterschiedliche Gaben, je nach der uns verliehenen Gnade.“ (Röm 12,6 Einheitsübersetzung)

In einer zweiten Phase, die man *metaphysisch* nennen könnte, wurden Begabungen stärker mit den jeweiligen Menschen assoziiert und als individuelle Befähigungen aufgefasst. Begabte galten nicht länger als übernatürliche Wesen, verschiedene Mythen wurden aber weithin akzeptiert. So hielt man den frühzeitigen Tod begabter Menschen für ausgleichende Gerechtigkeit und auch das „verrückte Genie“ hat seinen Ursprung wohl in dieser Zeit. Einige Mythen sind allerdings auch heute noch zu hören. So lässt sich beispielsweise zum besonders problematischen hochbegabten Schulkind eher das Gegenteil statistisch untermauern (Stöger, 2009, S. 18).

Mit dem aufziehenden 20. Jahrhundert begann die dritte Phase, die sich durch *empirische* Zugänge kennzeichnen lässt und die vor allem auch von den Entwicklungen in psychologischen Disziplinen und den dort genutzten wissenschaftlichen Methoden profitierte. Vorreiter waren beispielsweise Galton, später dann Binet und Simon. Ihnen ging es insbesondere auch um die Messung von Intelligenz und Intelligenzunterschieden; im Hinblick auf Begabung galt die simple Gleichung *begabt = hochintelligent*. Sie war auch Grundlage der viel beachteten Terman-Studie, einer 1921 begonnenen von Lewis Terman geleiteten Longitudinalstudie mit anfangs etwa 1500 hochintelligenten Kindern und Jugendlichen, die aus etwa 250 000 Schülerinnen und Schülern mittels Lehrernomination und Intelligenztests ausgewählt wurden. Bei der langfristigen Begleitung der sogenannten „Termiten“ bis in den Lebensabend hinein lag das Hauptaugenmerk nicht nur auf der schulischen und beruflichen Entwicklung, sondern u. a.

auch auf der familiären und gesundheitlichen, auch auf charakterlichen Eigenschaften und der sozialen Integration. Bei dieser an Umfang, Breite und Dauer wohl einmaligen Studie zeigte sich: In *allen* betrachteten Bereichen erreichten die Hochintelligenten bessere Werte und ihren intellektuellen Vorsprung aus Kinder- und Jugendtagen konnten die allermeisten bis ins hohe Alter bewahren, sofern sie nicht durch Unfall oder Krankheit geschädigt wurden. Die Divergenzhypothese, nach der hohe Intelligenz mit anderen Schwächen einhergeht, gilt damit als widerlegt.

Wobei man methodisch u. a. kritisieren muss, dass durch die von TERMANs Erwartungen beeinflusste Auswahl der Schulen, die Lehrernomination und durch die schulleistungsstarke Kinder bevorzugenden Intelligenztests eine Verzerrung der Untersuchungsgruppe erfolgte, dass der Lebensstandard in Kaliforniern damals insbesondere in der überrepräsentierten Ober- und Mittelschicht deutlich höher war als in weiten Teilen der USA oder dem Rest der Welt, und dass eine Kontrollgruppe im engeren Sinne fehlte. Außerdem kann die Stärke der Studie – die regelmäßige Befragung und Testung der „Termiten" über einen langen Zeitraum – auch als Schwäche, nämlich als regelmäßige Beeinflussung durch Etikettierung und Intervention interpretiert werden (Giger, 2009).

Die TERMAN-Studie arbeitete zwar intensiv mit dem Konstrukt Intelligenz, die Frage nach deren Natur oder Struktur wurde allerdings nicht gestellt. Eine einfache oder auch nur allgemein geteilte Antwort darauf gibt es wohl auch derzeit noch nicht, vielleicht ist sie für einen solchen Forschungsgegenstand, der (hoffentlich) ständigen Veränderungen und Entwicklungen unterliegt auch gar nicht wünschenswert (Jäger, 1984).

Für ihren Namensgeber hielt die TERMAN-Studie wohl auch überraschende, aus meiner Sicht sehr wichtige Ergebnisse bereit. So konnte zum einen die schulische und berufliche Entwicklung der meisten „Termiten" zwar als positiv eingeschätzt werden, unter ihnen gab es allerdings kaum Personen, die später wirklich außergewöhnliche Leistungen hervorbrachten. Zum anderen wurden zwei spätere Nobelpreisträger aufgrund zu geringer Intelligenz nicht in die ursprüngliche Untersuchungsgruppe aufgenommen (Stöger, 2009, S. 22). Offenbar ist außergewöhnlich hohe Intelligenz weder hinreichend noch notwendig für außergewöhnliche Leistungen.

In der Folge weitete sich die Perspektive auf Begabung und es entstanden multidimensionale Modelle. Multidimensional zum einen durch die Öffnung für weitere domänenspezifische Begabungen und zum anderen durch den Einbezug weiterer Persönlichkeitseigenschaften oder auch von Umweltmerkmalen. Schließlich hatte WILLIAM STERN bereits 1916 sehr weitsichtig gefordert, dass die Psychologie untersuchen müsse, welche seelischen Eigenschaften zur eigentlichen Begabung hinzutreten müssen, um besondere Leistungen zu erreichen (Stern, 1916). Allerdings muss man zugeben, dass die empirische Basis dieser Modelle häufig schmal ist.

Ein klassisches – oder vielleicht auch das klassische – ist RENZULLIs Drei-Ringe-Modell, nach dem Begabung in der Schnittmenge von überdurchschnittlichen allgemeinen und spezifischen kognitiven Fähigkeiten, von Kreativität und weit überdurchschnittlicher Aufgabenverpflichtung liegt, letztere wiederum umfasst kognitive, motivationale und emotionale Aspekte. Für RENZULLI war es wichtig, dass ein Mensch nicht hochbegabt geboren wird, sondern hochbegabtes Verhalten entwickelt. Ich denke, man kann sagen, dieses Modell – vielleicht ist es auch nur ein Bild – hat viel bewegt. Es wurde aber auch zu recht vielfach kritisiert, beispielsweise scheinen die Gleichwertigkeit und Stabilität der Ringe fraglich, die Umwelt wird vernachlässigt und vor allem werden Hochbegabung und Hochleistung gleichgesetzt.

Abb. 1: Drei-Ringe-Modell von RENZULLI

Ergebnis der Münchner Hochbegabtenstudien ist das Münchner Hochbegabungsmodell, das als Begabungsbereiche intellektuelle und kreative Fähigkeiten, soziale Kompetenz, praktische Intelligenz, künstlerische Fähigkeiten, Musikalität und Psychomotorik benennt. Begabung gilt hier als notwendiges individuelles Potenzial für bereichsspezifische Höchstleistungen, wobei Zuordnungen zwar nahe liegen, jedoch nicht expliziert werden. Ob es tatsächlich zu Höchstleistungen kommt, hängt auch von Persönlichkeits- und Umweltmerkmalen ab, die als Moderatoren wirksam sind. Das Modell ist in diesem Sinne kein Hochbegabungsmodell, sondern ein Bedingungsmodell für die Entwicklung bereichsspezifischer Leistungen, bei dem allerdings das Zusammenwirken der zahlreichen Variablen nicht spezifiziert wird. Darüber hinaus bleibt unklar, ob Begabungen aus verschiedenen der angenommenen Bereiche stets empirisch unterscheidbar sind (Süß, 2006).

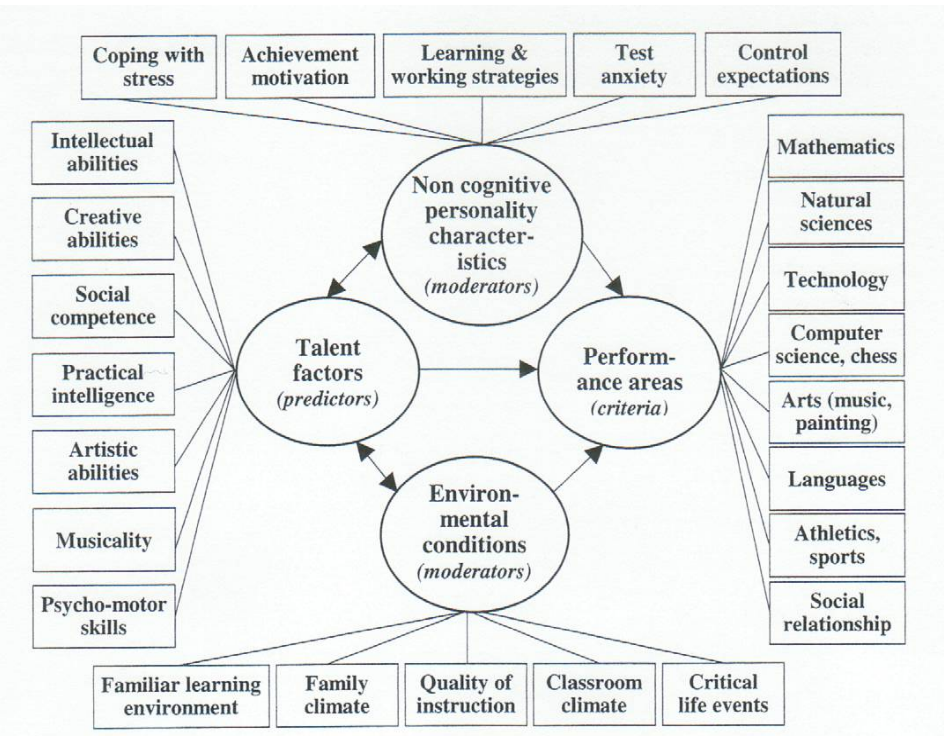


Abb. 2: Münchner Hochbegabungsmodell (Heller, 2010, S. 6)

Expertise

Während die psychometrisch orientierte Begabungsforschung auf eine möglichst sichere Identifikation späterer Höchstleister fokussiert und in diesem Sinne prospektiv orientiert ist, interessiert sich die kognitionspsychologisch ausgerichtete Expertiseforschung basierend auf dem Experten-Novizen-Paradigma für die Grundlagen außergewöhnlicher Leistungen und in jüngerer Zeit auch – jetzt aus retrospektiver Sicht – für die zentralen Bedingungen der Expertiseentwicklung. Beginnend mit den wegweisenden Studien zu Schach-Großmeistern des Niederländers DEGROOT wurden Experten in ganz unterschiedlichen Domänen wie Medizin, Physik, Informatik, Musik oder auch Tennis untersucht. Dabei gilt eine Person als Experte, wenn sie in einem bestimmten Gebiet dauerhaft herausragende Leistungen erbringt. Bei diesen Untersuchungen zeigte sich domänenübergreifend, dass Experten über eine breitere, differenziertere und qualitativ anders strukturierte Wissensbasis verfügen, die ihnen eine effiziente Enkodierung dargebotener Informationen und die Verwendung elaborierter Strategien für den Erwerb, den Abruf und die Nutzung von Wissen ermöglicht. Außerdem orientieren sich Experten an der Tiefenstruktur von Problemen, sie erkennen bedeutsame Muster schneller, arbeiten flexibler, können Repräsentationen schneller wechseln und mit mehrdeutigen und komplexen Situationen besser umgehen.
Es gibt allerdings auch Unterschiede zwischen Experten verschiedener Domänen. Beispielsweise arbeiten Experten abhängig von der Art ihrer Domäne (z. B. Physik vs. Programmierung) oder der Problemstellung eher vorwärts oder rückwärts (Richman, Gobet, Staszewski, & Simon, 1996; Waldmann & Weinert, 1990). Derartige Unterschiede werden verständlich, wenn man bedenkt, dass Expertise nicht zuletzt durch Anpassungen des kognitiven Systems an die spezifischen und durchaus unterschiedlichen Anforderungen der jeweiligen Domänen entsteht (Waldmann, Renkl, & Gruber, 2003).

Für die Entwicklung von Expertise gilt die intensive Auseinandersetzung mit der jeweiligen Domäne als entscheidendes Element. Für ein mittleres Ausmaß von Expertise in Domänen wie Schach, Physik oder Mathematik gehen Kognitionspsychologen von mehreren tausend Stunden Beschäftigungszeit aus (Waldmann & Weinert, 1990), für das Erreichen von Höchstleistungen formulierten bereits SIMON und CHASE (1973) die weithin akzeptierte Zehnjahresregel. Allerdings ist dabei nicht nur die reine Beschäftigungszeit bedeutsam, vielmehr kommt der Qualität der Auseinandersetzung eine entscheidende Rolle zu. Besonders wichtig ist dabei der Umfang des intentionalen Übens oder von *deliberate practice* (Ericsson, Krampe, & Tesch-Römer, 1993). Darunter ist eine planvolle, langfristige, oft auch begleitete Lerntätigkeit zu verstehen, die auf eine Verbesserung der eigenen Leistungsfähigkeit ausgerichtet und durch entsprechend anspruchsvolle Anforderungen an der Leistungsgrenze sowie durch ständige Überwachung und Rückmeldung der erbrachten Leistungen gekennzeichnet ist.

Zur Existenz angeborener Voraussetzungen für Expertise in verschiedenen Domänen gab es historisch gesehen unterschiedliche Positionen. Seit einiger Zeit wird jedoch auch in der Expertiseforschung weithin akzeptiert, dass für die Entwicklung exzeptioneller Leistungen dispositionale Variablen eine wesentliche Rolle spielen. Damit wurde eine Synthese von Vorstellungen, Forschungsmethoden und Ergebnissen zu Begabungen und Expertise möglich. Mittlerweile kann von einer Konvergenz oder sogar von einem fließenden Übergang zwischen Begabungs- und Expertiseforschung gesprochen werden (Heilmann, 1999; Perleth, 2001), der sich auch und insbesondere in integrativen Modellierungen einer Begabungs-, Talent- oder Expertiseentwicklung zeigt.
Ich werde später darauf zurückkommen.

Mathematische Begabungen

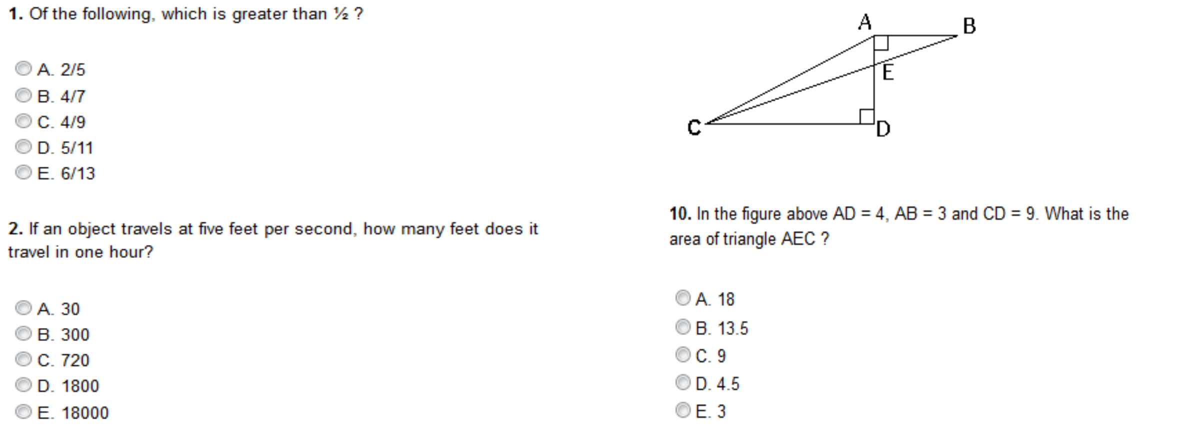
Mathematische Begabung – was ist das? Ein klassischer Definitionsvorschlag stammt von KARL KIEẞWETTER aus Hamburg, der 1985 formulierte:

> „*Mathematische Hochbegabung ist ein Konglomerat von (abtestbaren) Eigenschaften und Fähigkeiten eines Individuums, aufgrund dessen die Voraussage gemacht werden kann, daß dieses Individuum später und mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit ganz besondere, innerhalb der Mathematik wertvolle Leistungen erbringen wird (wenn es im mathematischen Bereich tätig wird)*“ (Kießwetter, 1985, S. 302).

Natürlich lassen sich an eine solche Definition immer auch Fragen richten. Zwei zentrale, die in den vergangenen Jahrzehnten immer wieder gestellt wurden, formulierten WIECZERKOWSKI und Kollegen in einem Aufsatz im „International Handbook of Giftedness und Talent“ (Heller, Mönks, Sternberg, & Subotnik, 2000). Erstens: Ist mathematische Begabung ein Ausdruck spezifischer kognitiver Merkmale oder ist sie, zumindest zum wesentlichen Teil, Ergebnis einer hohen allgemeinen Intelligenz? Und zweitens: Ist mathematische Begabung ein monolithisches Konstrukt oder gibt es verschiedene Begabungsprofile? (Wieczerkowski, Cropley, & Prado, 2000, S. 413) Zugleich wiesen sie auf die – gelegentlich allerdings außer Acht gelassene – Selbstverständlichkeit hin, dass Antworten auf diese Fragen und Ansätze, solche Antworten zu finden, vor allem auch davon abhängig sind, was unter Mathematik verstanden wird.

Erfasst man mathematische Leistungen durch Aufgaben, die sich kaum von den in Intelligenztests verwendeten Items unterscheiden und bei denen es in erster Linie darauf ankommt, sie schnell und fehlerfrei zu lösen – wobei letzteres ausschließlich am Erwartungshorizont der Testentwickler gemessen wird (Kießwetter, 1992) –, so überrascht es nicht, wenn sich Dimensionen mathematischer Leistung kaum von denen der allgemeinen (Test-) Intelligenz unterscheiden (Zimmermann, 1992).

Zumindest stärkere fachliche Bezüge haben spezifische Schulleistungs- oder Studierfähigkeitstests. Ein häufig auch zur Identifikation dann jüngerer mathematisch oder auch sprachlich begabter Schülerinnen und Schüler genutzter ist der amerikanische SAT, zu dem die folgende Abbildung zur Illustration einige Beispiele für Trainingsaufgaben wiedergibt.


1. Of the following, which is greater than ½ ?

- A. 2/5
- B. 4/7
- C. 4/9
- D. 5/11
- E. 6/13

2. If an object travels at five feet per second, how many feet does it travel in one hour?

- A. 30
- B. 300
- C. 720
- D. 1800
- E. 18000

10. In the figure above AD = 4, AB = 3 and CD = 9. What is the area of triangle AEC ?

- A. 18
- B. 13.5
- C. 9
- D. 4.5
- E. 3

Abb. 3: Trainingsaufgaben zum SAT (http://www.majortests.com/sat/math-skills.php)

Anhand des SAT wurden in einer Untersuchung von CAMILLA BENBOW zunächst knapp 300 mathematisch begabte und etwas mehr als 150 sprachlich begabte 13-Jährige identifiziert – sie gehörten zu den besten 0,01% ihrer Altersgruppe –; anschließend wurden ihre Leistungen in verschiedenen Intelligenz- und Fähigkeitstests, unter anderem angelehnt an THURSTONES Primärfaktoren verglichen. Nur 16 Jungen und zwei Mädchen gehörten übrigens zu beiden Gruppen, bei den anderen zeigten sich signifikante Gruppenunterschiede in fast allen Fähigkeitsbereichen, wobei die Gruppenzugehörigkeit und nicht beispielsweise das Geschlecht den stärksten Einfluss auf die Testergebnisse hatte (Benbow & Minor, 1990). Bereits auf der Grundlage des SAT lässt sich also das Konzept einer *allgemeinen* intellektuellen Hochbegabung, die mathematische Begabung umfassen würde, nicht halten.

Allerdings muss man kritisch fragen, ob solche Tests wie der SAT – die doch zu einem großen Teil Wissensbestände und mehr oder weniger eingeübte Vorgehensweisen abprüfen – unserem Bild von Mathematik als problemlösender und theoriebildender Tätigkeit gerecht werden. Darüber hinaus besitzen ausschließlich produktorientierte, eindimensionale Punktbewertungen – mit denen auch der SAT arbeitet – wohl kaum Potenziale zur Kennzeichnung und detaillierten Beschreibung von Begabungen. WALDMANN und WEINERT sehen diese dagegen vor allem in Antworten auf die Frage, „durch welche *Denkprozesse* diese hohen Leistungen zustande kommen und in welchen *kognitiven Prozessen und Strukturen* sich Individuen mit hohen und geringen Leistungen voneinander unterscheiden“ (Waldmann & Weinert, 1990, S. 22, Hervorhebungen T. F.). Dass diese Prozessebene notwendig ist, um unseren Hunger nach Explikation zu stillen – wie es ADOLF OTTO JÄGER, der Vater des Berliner Intelligenzstrukturmodells einmal formulierte – war übrigens bereits den frühen Psychometrikern klar. So war beispielsweise für THURSTONE, als die psychologische Interpretation seiner Primärfaktoren anstand, Selbstbeobachtung bei der Bearbeitung entsprechender Markieraufgaben Mittel seiner Wahl (Jäger, 1984).

VADIM KRUTETSKII gehörte wohl zu den ersten Psychologen, die sich dann nicht nur aus psychometrischer Sicht mit mathematischen Begabungen beschäftigten. Gemeinsam mit seiner Arbeitsgruppe unternahm er bereits in den 1950er und 1960er Jahren einen auch für heutige Forschungsarbeiten noch grundlegenden Versuch der Beschreibung mathematischer Begabungen im Schulalter aus einer kognitionspsychologischen Perspektive. Dazu wurden umfangreiche empirische Untersuchungen mit mehr als 200 Schülerinnen und Schülern der zweiten bis zehnten Klassenstufe durchgeführt, die aufgrund ihrer Noten, vor allem aber auch auf der Basis von Lehrerurteilen als mathematisch leistungsstark, durchschnittlich oder relativ leistungsschwach eingeschätzt wurden. Um vor allem auch die qualitativen Aspekte mathematischer Lösungsprozesse zu erfassen, wurden den Schülerinnen und Schülern bis zu 26 Aufgabenserien vorgelegt, die jeweils aus mehreren Subtests und diese wiederum aus einer Folge von Aufgaben mit steigendem Schwierigkeitsgrad bestanden. Die folgende Abbildung zeigt einige Aufgabenbeispiele aus einer Serie, mit der das Umkehren von Gedankengängen erfasst werden sollte. Dabei wurden den Probanden übrigens bereits mehrere Wochen vor der Hauptuntersuchung zu den hier genutzten Umkehraufgaben analoge Aufgaben vorgelegt. So sollte erkundet werden, welchen Einfluss die unmittelbar vorausgehende Beschäftigung mit der originalen Aufgabe auf die Bearbeitung der Umkehraufgabe hat.

- Eine Mutter ist dreimal so alt wie ihre Tochter. In 10 Jahren wird sie nur noch zweimal so alt sein. Wie alt ist die Mutter?
- Ein Vater ist 35 Jahre alt und sein Sohn ist 5 Jahre alt. In wie vielen Jahren wird der Vater dreimal so alt wie der Sohn sein?

- Wie lange muss man arbeiten, um *a* Rubel zu verdienen, wenn man einen Tageslohn von *b* Rubel erhält?
- Wie viel verdient man in *c* Tagen, wenn der Tageslohn *d* Rubel beträgt?

- Wie groß ist die Summe der Innenwinkel eines konvexen Siebenecks?
- Die Innenwinkelsumme eines konvexen Vielecks beträgt 1800°. Wie viele Ecken hat die Figur?

Abb. 4: Aufgaben zum Umkehren von Gedankengängen nach KRUTETSKII (1976)

Erfasst wurde nicht nur, wie weit die Aufgabenserien durch die Untersuchungsteilnehmer selbstständig bearbeitet werden konnten, sondern auch, wie weit sie mit leichten Unterstützungen durch den Versuchsleiter kamen. Dadurch sollte die einmalige „Punktmessung“ ergänzt werden durch Anhaltspunkte zur jeweiligen Zone der nächsten Entwicklung. Die Analysen der Bearbeitungsprozesse und –ergebnisse wurden durch mehrjährige Beobachtungen, Befragungen von Eltern und Lehrern, von Mathematikdidaktikern und Mathematikern ergänzt sowie durch biografische Forschungen weiter angereichert (Krutetskii, 1976).

Die in der Untersuchung herausgearbeiteten spezifischen Fähigkeiten und Merkmale, in denen sich mathematisch erfolgreiche von weniger erfolgreichen Schülerinnen und Schülern unterscheiden, lassen sich sehr knapp und orientiert am Modell der Informationsverarbeitung etwa auf folgende Weise zusammenfassen (S. 350 f.):

- *Gewinnen mathematischer Informationen:* Fähigkeit zur formalisierten Wahrnehmung mathematischen Materials, zum Erfassen der formalen Struktur eines Problems
- *Verarbeiten mathematischer Informationen:* Fähigkeit zum bereichsspezifischen logischen Denken; Fähigkeit zum Denken in mathematischen Symbolen; Fähigkeit zur schnellen und breiten Generalisierung mathematischer Objekte, Beziehungen und Operationen; Fähigkeit zur Verkürzung von Prozessen mathematischen Schlussfolgerns; Fähigkeit zum Denken in verkürzten Strukturen; Beweglichkeit des Denkens im mathematischen Bereich; Streben nach Klarheit, Einfachheit, Ökonomie und Rationalität von Lösungsprozessen; Umkehrbarkeit mentaler Prozesse beim mathematischen Schlussfolgern
- *Speichern mathematischer Informationen:* mathematisches Gedächtnis (verallgemeinertes Wissen über mathematische Beziehungen, Typen von Aufgaben und Problemen, Argumentations- und Beweisschemata, Problemlösemethoden, grundsätzliche Zugangsweisen)
- *allgemeine synthetische Komponente:* mathematische Gerichtetheit

Die beschriebenen Komponenten sind nach KRUTETSKII eng miteinander verknüpft und beeinflussen sich gegenseitig. Deren Verbindung zu einer Struktur mathematischen Denkens kann *individuell unterschiedlich* sein, wobei Komponenten auch durch andere kompensiert werden können. Hohe mathematische Leistungen lassen sich demnach durch verschiedene Komplexe von Fähigkeiten bzw. „psychischen Besonderheiten“ erreichen (Krutezki, 1968). Es gibt daher verschiedene Ausprägungen mathematischer Begabungen, zumal nach KRUTETSKII zusätzlich weitere nützliche, allerdings nicht notwendige Merkmale wie die Geschwindigkeit von Denkprozessen, Rechenfertigkeiten, ein ausgeprägtes Gedächtnis für Symbole, Zahlen und Formeln, Raumvorstellungsvermögen sowie die Fähigkeit zum anschaulichen Vorstellen abstrakter mathematischer Beziehungen und Abhängigkeiten existieren (Krutetskii, 1976).

Die Ausprägungen der beiden letztgenannten Aspekte bestimmen nicht die Höhe der Begabung, nach KRUTETSKII allerdings deren Typ. Nach dem Verhältnis von bildhaft-anschaulicher und begrifflich-logischer Komponenten zueinander unterscheidet er zwischen dem geometrischen, dem analytischen und dem harmonischen Typ, der wohl die meisten Entwicklungspotenziale mit sich bringt.

KRUTETSKIIs Charakterisierung mathematischer Begabungen gilt in dieser Allgemeinheit eher für Mittelstufenschüler. Seine damalige Doktorandin, IRINA DUBROVINA, konzentrierte ihre Untersuchungen auf das Grundschulalter. Sie zeigten, dass sowohl das Streben nach ökonomischem Denken als auch ein mathematisches Gedächtnis im Grundschulalter noch nicht zum Ausdruck kommen, darüber hinaus sind Flexibilität und Reversibilität des Denkens allenfalls in „Keimform“ zu beobachten, wobei das Umkehren von Gedankengängen als besonders anspruchsvoll gilt (Lompscher & Gullasch, 1977). Auch die Verkürzung von Denk- und Verarbeitungsprozessen kommt erst gegen Ende der klassischen Grundschulzeit über elementare Formen hinaus, dagegen ist das zügige Erfassen der formalen Struktur einer mathematischen Situation für begabte Kinder bereits früher möglich; gegen Ende der Grundschulzeit können sie auch mit komplexeren Strukturen umgehen. Von allen Komponenten tritt im Grundschulalter nach DUBROVINA „am klarsten die Fähigkeit zur Verallgemeinerung des Mathematikstoffes hervor, verständlicherweise in relativ einfacher Form als Fähigkeit, das Gemeinsame in verschiedenen Aufgaben und Beispielen zu erfassen und entsprechend auch das Unterschiedliche im Gemeinsamen zu sehen“ (Krutezki, 1968, S. 52).

Sind die von KRUTETSKII beschriebenen Fähigkeiten und Merkmale spezifisch mathematisch? Dies mag man zunächst kritisch sehen, schließlich spielen beispielsweise das Generalisieren und das Umkehrenkönnen auch in nichtmathematischen Bereichen eine große Rolle und leicht lassen sich Korrespondenzen beispielsweise zum Konzept der fluiden Intelligenz von CATTELL herstellen (Foth & van der Meer, 2013). KRUTETSKIIs Antwort verdeutlicht das folgende Zitat:

> “Certain features of a pupil’s mental activity can characterize his mathematical activity alone – can appear only in the realm of the spatial and numerical relationships expressed in number and letter symbols, without characterizing other forms of his activity and without correlating with corresponding manifestations in other areas. Thus, *mental abilities that are general by nature* (such as the ability to generalize) *in a number of cases can appear as specific abilities* (the ability to generalize mathematical objects, relations, and operations). There appears to be every basis for speaking of *special, specific* abilities, and not of general abilities that are only refracted in a unique way in mathematical activity.” (Krutetskii, 1976, S. 360)

Für ihn sind es also sehr wohl spezifische oder spezifizierte Fähigkeiten, denn Fähigkeiten existieren nicht an sich, sondern immer nur an bestimmten Inhalten, mit denen sie eine untrennbare Einheit bilden, wie es LOMPSCHER etwa zur selben Zeit formuliert hat (Lompscher & Gullasch, 1977). Dies ist eine Sichtweise, die beispielsweise auch von WALDMANN und WEINERT (1990) oder WIECZERKOWSKI (1995) geteilt wird. Mir scheint es plausibel, dass sich zunächst allgemeine kognitive Fähigkeiten im Tätigsein weiter entwickeln und eben auch spezifizieren. Eine wesentliche Rolle könnte dabei auch die Akkumulation von Kenntnissen spielen, die einerseits durch Fähigkeiten des Individuums gewonnen werden und andererseits eine wesentliche Grundlage der Entwicklung und Realisation von geistigen Fähigkeiten sind.

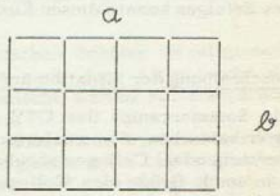
In diesem Sinne würden sich Fähigkeiten, Wissen und Tätigsein in engen Wechselwirkungen aneinander fortentwickeln.

Inwieweit die von KRUTETSKII und den im Folgenden zitierten Mathematikdidaktikern beschriebenen Fähigkeiten mathematikspezifisch und zugleich charakterisierend für mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler sind, hängt selbstverständlich auch von der mathematischen Reichhaltigkeit der Anforderungssituationen ab, in denen sie gezeigt werden (können).

In dieser Reichhaltigkeit unterscheiden sich psychologische und mathematikdidaktische Untersuchungen ganz erheblich. Um für ein Förderprojekt für mathematisch begabte Mittelstufenschüler die notwendigen Auswahlentscheidungen treffen zu können, entwickelte KIEßWETTER den *Hamburger Test für mathematische Begabung.* Die folgende Problemstellung illustriert die für den Test entwickelten.

Statt einer leeren halben Seite:

Eine Aufgabe, die auch im HTMB verwendet werden könnte (Bearbeitungszeit dann ca. 17 Minuten).



Stelle Dir vor, Du solltest mit Streichhölzern der Länge 1 ein Gitterrechteck – wie nebenan skizziert – mit den ganzzahligen Seitenlängen a und b auslegen.

1) A(a,b) sei die Zahl der dafür nötigen Streichhölzer (bei unserem Beispiel ist A(4,3)=31).
Bestimme A(50,60) .
Gib eine Regel (oder Formel) an, mit der man A(a,b) berechnen kann, ganz gleich, wie groß die natürlichen Zahlen a und b gewählt werden.
2) Formuliere und bearbeite die entsprechende Aufgabe für den 3-dimensionalen Raum (also für Körper anstelle von Flächen in der Ebene).
3) Formuliere weitere und ähnliche Probleme.

Abb. 5: Illustrierende Problemstellung zum HTMB (Kießwetter, 1988, S. 89)

Die große mathematische Reichhaltigkeit ist verbunden mit zunehmender Offenheit, gemeinsam sollen sie mathematisches Tätigsein im engeren Sinne ermöglichen und anregen. Für eine Bewertung sind selbstverständlich nicht nur Ergebnisse, sondern vor allem Vorgehensweisen von Interesse. Zugleich wird meines Erachtens deutlich, dass für eine erfolgreiche Auseinandersetzung nicht nur die Verfügbarkeit spezifischer Fähigkeiten, sondern auch von darauf aufbauenden, bereits komplexeren Denk- und Handlungsmustern bedeutsam ist. In diesem Sinne verstehe ich den folgenden von KARL KIEßWETTER formulierten Katalog, der aber ausdrücklich keine umfassende Beschreibung einer mathematischen Begabung sein soll, stattdessen aber gleichzeitig Orientierung geben möchte für die Förderung mathematisch begabter Mittel- und Oberstufenschüler (Kießwetter, 1985, S. 302): *Organisieren von Material;Sehen von Mustern und Gesetzen; Erkennen von Problemen, Finden von Anschlussproblemen; Wechseln der Repräsentationsebene (vorhandene Muster bzw. Gesetze in „neuen“ Bereichen erkennen und verwenden); Strukturen höheren Komplexitätsgrades erfassen und darin arbeiten; Prozesse umkehren.*

Man mag einwenden, dass der Einsatz solch komplexer Problemstellungen und die Analyse im Hinblick auf die von KIEßWETTER genannten Denk- und Handlungsmuster methodisch nicht einfach ist, sich testtheoretisch schlecht absichern lässt und dass eine „Normierung“ aus der Natur der Sache heraus nur schwer möglich ist. Man erlangt deshalb womöglich lediglich ein mit Unsicherheiten und Unschärfen behaftetes Bild, aber wenigstens ein Bild von dem Phänomen, für das man sich tatsächlich interessiert.

Will man mathematische Begabungen im Grundschulalter untersuchen, muss man fachliche Reichhaltigkeit, Komplexität und Offenheit reduzieren, aber natürlich nicht beliebig. Abb. 6 zeigt ein Beispielmaterial aus dem von MARIANNE NOLTE geleiteten Hamburger Forschungs- und Förderprojekt für Grundschulkinder. Die *Plusdreiecke* wurden für eine „Schnupperphase“ – den Mathetreff für Mathefans – entwickelt, sie leiten deshalb einen Bearbeiter noch etwas stärker an, erlauben aber dennoch substanzielle Entdeckungen, sie ermöglichen verschiedene Vorgehensweisen, provozieren Argumentationen und regen vor allem auch zu einer längeren Auseinandersetzung an.

Was man so alles an den Plus-Dreiecken entdecken kann:

Zur Information:

Bei Plus-Dreiecken steht unter zwei Zahlen jeweils deren Summe.

Beispiele:

(1)	(2)	(3)
3 5 1	5 1 2	0 1 1
8 6	6 3	1 2
14	9	3

Aufgaben:

A Kann man in solchen Plus-Dreiecken auch 5, 6, 11 und 12 herstellen?

B Kann man jede Zahl herstellen?

C Welche Zahlen kann man herstellen, wenn in der ersten Zeile keine 0 stehen darf?

D Gib alle Möglichkeiten an, in solchen Plus-Dreiecken die 5 herzustellen.

Abb. 6: Plus-Dreiecke (Nolte, 2004, S. 85)

Das folgende Beispiel ist eine Aufgabe aus dem Indikatoraufgabentest von FRIEDHELM KÄPNICK für Schülerinnen und Schüler der dritten und vierten Jahrgangsstufe. Unter anderem dieser Test wurde in den 1990er Jahren im Rahmen einer Studie von KÄPNICK entwickelt, mit der das Themenfeld Begabung für den Grundschulbereich erschlossen wurde. Ihr Ziel war es, spezifische Merkmale für Dritt- und Viertklässler mit einer „potenziellen mathematischen Begabung“ und davon ausgehend verschiedene Ausprägungstypen einer mathematischen Begabung im Grundschulalter zu kennzeichnen. Ausgehend von den Ergebnissen KRUTETSKIIS und KIEßWETTERS sowie einer breiten Analyse fachwissenschaftlicher, fachdidaktischer, pädagogischer und psychologischer Literatur konstruierte FRIEDHELM KÄPNICK ein Merkmalsystem, das neben mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen erstmals explizit auch begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften umfasste und damit die kindliche Gesamtpersönlichkeit einbezog. Zu ersteren entwickelte und erprobte Käpnick besagte Indikatoraufgaben, der daraus schließlich konstruierte Test wurde in einer Vergleichsuntersuchung mit 70 als potenziell mathematisch begabt benannten und 44 weiteren Dritt- und Viertklässlern eingesetzt.


Im nebenstehenden Dreieck kann man Besonderheiten in der Anordnung der Zahlen entdecken.

a) Welche Besonderheiten erkennst du in der Anordnung der Zahlen? Gib für 3 erkannte Besonderheiten Zahlenbeispiele an und beschreibe die Besonderheit jeweils in einem Satz!

Lösung:

b) Versuche, ein zweites Dreieck mit denselben Besonderheiten zusammenzustellen! Verwende dabei andere Zahlen!

Abb. 7: Indikatoraufgabe von KÄPNICK (1998, S. 152)

Die Identifikation der mathematisch begabten Schülerinnen und Schüler erfolgte durch Lehrer- oder Selbstnomination ergänzt durch Beobachtungen während der ersten Treffen eines universitären Förderprojekts. Die Vergleichsgruppe setzte sich aus zwei kompletten Schulklassen zusammen, wobei auf ein zur Begabtengruppe nahezu gleiches Geschlechterverhältnis geachtet wurde. Die Ergebnisse des Indikatoraufgabentests bestätigten die zuvor theoretisch gewonnenen mathematikspezifischen Begabungsmerkmale ganz überwiegend. Zur empirischen Absicherung möglicher begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften wurden 38 Lehrerinnen gebeten, 91 potenziell mathematisch begabte Dritt- und Viertklässler aus ihren Schulklassen anhand eines Fragebogens einzuschätzen (Käpnick, 1998).

Das auf diese Weise entwickelte und im Folgenden knapp zusammengefasste Merkmalsystem konnte darüber hinaus in Einzelfallstudien und zwischenzeitlich in weiteren Untersuchungen unter anderem von ASTRID HEINZE, CLAUDIA LACK und DANIELA AßMUS bestätigt werden: Es wurde später von FRIEDHELM KÄPNICK und MANDY FUCHS zu einem Modell der Entwicklung mathematischer Begabungen im Grundschulalter (Käpnick, 2006) ausgebaut, in dem diese u. a. als dynamisches Potenzial zu besonderen Leistungen gekennzeichnet werden:

- *Mathematikspezifische Begabungsmerkmale:* mathematische Sensibilität; Originalität und Fantasie bei mathematischen Aktivitäten; Gedächtnisfähigkeit für mathematische Sachverhalte; Fähigkeit zum Strukturieren; Fähigkeit zum Wechseln der Repräsentationsebenen; Fähigkeit zur Reversibilität und zum Transfer
- *Begabungsstützende allgemeine Persönlichkeitseigenschaften:* hohe geistige Aktivität; intellektuelle Neugier; Anstrengungsbereitschaft, Leistungsmotivation; Freude am Problemlösen; Konzentrationsfähigkeit; Beharrlichkeit; Selbstständigkeit; Kooperationsfähigkeit (vgl. Käpnick, 1998, S. 119).

Wie Sie sehen, umfasst diese Liste auch schwer operationalisierbare und durch Testaufgaben kaum erfassbare Aspekte wie *Sensibilität* und *mathematische Fantasie*, die dennoch wichtig sind – selbstverständlich gilt hier ebenso, was vorhin zu KIEßWETTERS Katalog bemerkt wurde.

Bei den mathematikspezifischen Begabungsmerkmalen, darauf sei noch einmal ausdrücklich hingewiesen, kommt es darauf an, dass sie in mathematisch hinreichend reichhaltigen Situationen gezeigt werden können. Im Hinblick auf diese Merkmale konnte KÄPNICK aus den Ergebnissen des Indikatoraufgabentests mittels Clusteranalyse außerdem vier Typen konstruieren, die deutliche Differenzen in ihren Fähigkeitsprofilen aufweisen. Unterschiede wurden beispielsweise hinsichtlich des Speicherns visueller Zahlenstrukturen, des Einprägens akustisch gegebener Zahlen, hinsichtlich des Raumvorstellungsvermögens oder des Umgangs mit besonders komplexen Problemstellungen beobachtet. Zu jeweils zwei der vier Typen ließen sich etwa gleich viele Schülerinnen und Schüler zuordnen, sodass tatsächlich die Existenz verschiedener Profile mathematischer Begabung im Grundschulalter nahe liegt. Auch bezüglich begabungsstützender Persönlichkeitseigenschaften deuteten sich verschiedene Ausprägungen an, inwieweit es sich dabei um Typen handelt, musste allerdings offen bleiben.

Neben einmaligen Testungen und Befragungen führte FRIEDHELM KÄPNICK im Rahmen seiner Studie auch längerfristige Beobachtungen der als potenziell mathematisch begabt identifizierten Mädchen und Jungen durch. Dabei schienen einige Kinder mitunter bereits verfestigte Problemlösestile entwickelt zu haben. In einer spezifisch ausgerichteten Nachfolgeuntersuchung von MANDY FUCHS, in der detaillierte Einzelfallstudien mit quantitativen Analysen kombiniert wurden, konnten drei verschiedene typische Vorgehensweisen von Dritt- und Viertklässlern beim Problemlösen empirisch nachgewiesen bzw. begründet werden (Fuchs, 2006).

Allerdings berührt dies ja die zweite Frage WIECZERKOWSKIS. Zur ersten, also zur Spezifität einer mathematischen Begabung ist auch aus mathematikdidaktischer Sicht bereits Einiges angeklungen. Natürlich lassen sich weitere Hinweise finden. So werden Fallstudien berichtet, beispielsweise von BERND ZIMMERMANN, der im Hamburger Förderprojekt den 14jährigen Fritz kennenlernte, der mit einem IQ von knapp über 90 zu den leistungsstärksten Teilnehmern zählte und sich vor allem durch sehr gute, ausgereifte Ideen, eine schnelle Auffassungsgabe, ein genaues Sprachverständnis und durch Konzentration auf das Wesentliche auszeichnete. MARIANNE NOLTE skizzierte kürzlich verschiedene Fälle „zweifach außergewöhnlicher“ Grundschüler, die über ungewöhnliche mathematische Fähigkeiten, insgesamt jedoch über sehr ungleichmäßige Fähigkeitsprofile verfügten (Nolte, 2013b). Darunter waren der neunjährige Lars, der außergewöhnlich gut im DeMAT 2+ abschnitt, dessen verbale Fähigkeiten den mit dem CFT 20 R gemessenen Gesamt-IQ allerdings um mehr als zwei Standardabweichungen unterschritten. Oder auch Justin, acht Jahre alt, der über ganz außergewöhnliche mathematische und weit unterdurchschnittliche Lesefähigkeiten verfügte, was übrigens im Schulunterricht zuvor kaum aufgefallen war.

Aber auch über Einzelfälle hinaus gibt es Ergebnisse aus jüngster Zeit, die sehr deutlich für die Notwendigkeit sprechen, zwischen mathematischen und allgemeinen intellektuellen Begabungen bzw. hoher Intelligenz zu unterscheiden. Beispielsweise aus dem Hamburger Forschungs- und Förderprojekt von MARIANNE NOLTE:
Da in der Millionenstadt Hamburg unter den an einer Teilnahme am Förderprojekt interessierten Drittklässlern eine Auswahl erfolgen muss, werden die Kinder dort zunächst zu einer Probeveranstaltung – dem „Mathetreff für Mathefans“ (Nolte, 2004) – eingeladen. Danach bearbeiten die Schülerinnen und Schüler einen eigens entwickelten Mathematik- sowie einen Intelligenztest (CFT 20 bzw. CFT 20 R), der besonders stark mit den Mathematiknoten korreliert. Mittlerweile liegen vollständige Daten von 1663 Mädchen und Jungen aus neun Jahrgängen vor. Für die hier vorzustellende Analyse konnten diese Kinder als Gesamtgruppe betrachtet werden, da sich die jeweiligen Testergebnisse über alle Jahrgänge hinweg nicht signifikant voneinander unterschieden. In dieser Gesamtgruppe korrelierten nun die Ergebnisse von Intelligenz- und Mathematiktest – für den jeweils eine Rangliste gebildet wurde – mit -0,34. Allerdings wurde dieser Zusammenhang deutlich schwächer für solche Kinder, die besonders gute Ergebnisse im Mathematiktest erreichten, so sank beispielsweise der Korrelationskoeffizient für die Ränge 1 bis 15 auf -0,14.

Der nicht sehr starke statistische Zusammenhang und dessen weitere Reduktion sind aufgrund der (zunehmenden) Selektivität und der (abnehmenden) Stichprobengröße teilweise erwartbar, darin wird aber auch deutlich: Intelligenztestergebnisse und mathematische Leistungsfähigkeit hängen über die Gesamtpopulation betrachtet zwar zusammen, allerdings kann eine besondere mathematische Begabung – wie sie etwa von KIEẞWETTER oder KÄPNICK beschrieben wird und die sich in der erfolgreichen Auseinandersetzung mit mathematisch *reichhaltigen* Problemstellungen zeigt – nicht aus dem IQ abgeleitet werden (Nolte, 2011, 2013a).

Mit den Arbeiten von KRUTETSKII, KIEẞWETTER und KÄPNICK liegen Charakterisierungen mathematischer Begabungen mit unterschiedlichen Akzentuierungen vor. In einschlägigen aktuellen Arbeiten zu den ersten Schuljahren von DANIELA AẞMUS (2007, 2008) und zum Vorschulalter von KATHRIN TALHOFF (2012) zeigen sich viele Gemeinsamkeiten mit dem Merkmalsystem von KÄPNICK, aber auch Unterschiedlichkeiten. Dies provoziert die kritische Frage, was dies theoretisch für das Konzept „mathematische Begabung“ bedeuten könnte. Selbst wenn man es nicht im klassischen Sinne, sondern als dynamisches Konstrukt denkt, lässt sich kritisch nach der Absicherung der Wahrscheinlichkeitsaussage in der Begabungsdefinition von KIEẞWETTER oder nach der Gültigkeit der INUS-Bedingung fragen, nach der Begabungen nicht hinreichend, aber notwendiger Bestandteil eines hinreichenden Bedingungsgefüges zum Erreichen exzeptioneller Leistungen sind. Außerdem: Wie steht es um die Erfahrungsabhängigkeit einzelner Merkmale, insbesondere wohl mit Blick auf die von KIEẞWETTER herausgearbeiteten komplexen Operationen mathematischen Denkens und Handelns? Oder auch: Wie passen die Methoden der empirisch gestützten Konstruktion der Merkmalsysteme zum Begabungsbegriff? Inwieweit gehen beschriebene Begabungen besonderen Leistungen voraus und woher rühren die Ähnlichkeiten mit Kennzeichen von Expertise?

Einerseits sind es diese Fragen, andererseits mögliche Potenziale, die mich zu dem Vorschlag führen, Ansätze aus der psychologischen Forschung zu einer Synthese von Begabungs- und Expertisekonzept auch für die Mathematikdidaktik aufzugreifen.

Als besonders interessanter Ansatz zu einer solchen Integration erscheint mir das von ROBERT STERNBERG (1998, 2000) vorgeschlagene Modell einer *sich entwickelnden Expertise*. Nach diesem ist ein Individuum kontinuierlich in einem Prozess der sich entwickelnden mathematischen Expertise, wann immer es mathematisch tätig ist. Dabei gibt es interindividuelle Unterschiede hinsichtlich Geschwindigkeit und Asymptote der Expertiseentwicklung, die wohl in angeborenen Merkmalen begründet sind. Einfluss auf diese Entwicklung haben aber vor allem auch Umfang und Art der Auseinandersetzung mit Mathematik und die Unterstützung durch die Umwelt, wobei insgesamt die durch Umweltfaktoren bedingte Varianz höchstwahrscheinlich deutlich größer ist als die in angeborenen Unterschieden begründete (dazu auch Simonton, 1999).

Entscheidend für das STERNBERGsche Modell ist, dass Begabungs- oder auch Intelligenztests Aspekte des aktuellen Entwicklungsstands der Expertise erfassen. Damit werden sowohl die Erfahrungsabhängigkeit entsprechender Testergebnisse als auch der enorme Einfluss von Lern- und Übungsprozessen auf die anschließende Entwicklung betont. Auch wenn derartige Tests in der Praxis häufig zur Vorhersage späterer Leistungen beispielsweise in Schule, Studium oder Beruf benutzt werden, kommt den damit gemessenen Konstrukten deswegen aus theoretischer Sicht kein grundlegenderer oder kausaler Charakter zu.

Grundlagen für die Entwicklung einer mathematischen Expertise sind in Abb. 8 veranschaulicht, wobei Schattierungen den Einfluss angeborener Variablen und Doppelpfeile die vielfältigen, aus meiner Sicht sehr wesentlichen Wechselwirkungen der verschiedenen Bereiche aufeinander andeuten sollen; der punktierte Pfeil steht für die Dynamik aller Bereiche. Deren Eigenschaften, die Bedeutung von Merkmalen aus den verschiedenen Bereichen und auch die Gesamtbedeutung der jeweiligen Bereiche für die Expertiseentwicklung verändern sich im Laufe der Zeit (vgl. dazu auch Arbeiten zu unterschiedlichen Phasen der Expertiseentwicklung; z. B. Bloom, 1985; Subotnik, 2008).

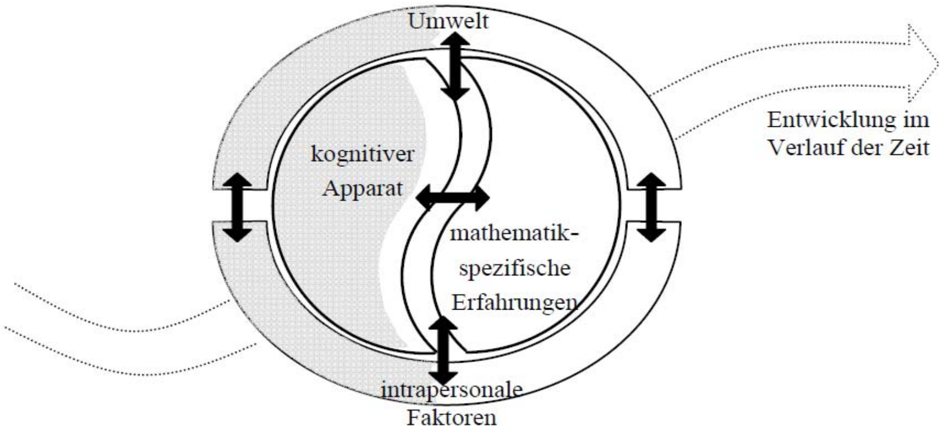


Abb. 8: Merkmalsbereiche zur Entwicklung mathematischer Expertise (Fritzlar, 2013, S. 49)

Leider kann ich nicht auf alle Details eingehen und muss hier auf die entsprechende Literatur verweisen. Nur so viel:

Ausgangspunkt der Entwicklung mathematischer Expertise sind weitgehend angeborene hirnorganische Strukturen, teilweise domänenspezifische basale Prozesse und Lernpotenziale (Weinert, 2000). Zahlreiche Untersuchungen beispielsweise zur Neuroplastizität haben allerdings gezeigt, dass dieser Merkmalsbereich auch noch im Erwachsenenalter teilweise flexibel ist und durch Lernprozesse beeinflusst werden kann (z. B. Neubauer & Stern, 2007; Spitzer, 2002; für die Domäne Musik z. B. Olbertz, 2009). So wiesen PESENTI et al. (2001) beispielsweise nach, dass Experten im Kopfrechnen im Vergleich zu Nichtexperten beim Rechnen andere neuronale Bereiche und Netzwerke unter Einbezug des episodischen Gedächtnisses nutzen. Auch wenn der Einfluss genetischer Dispositionen (und deshalb der schattierte Anteil in der Abbildung) relativ groß ist, kommt also der Verfügbarkeit von Lerngelegenheiten dennoch eine wichtige Rolle zu (Perleth & Wilde, 2009).

Schlüsselelement für die weitere Expertiseentwicklung ist das mathematische Tätigsein, denn: „Alle geistigen Kompetenzen müssen gelernt werden“ wie es FRANZ EMANUEL WEINERT einmal formulierte (Weinert, 2000, S. 12). Dabei spielt selbstverständlich nicht nur ein hinreichend großer Umfang, sondern insbesondere auch die Qualität von Erfahrungen bzw. informeller und formaler Lernaktivitäten eine entscheidende Rolle.
Erfolgt die Auseinandersetzung mit der Domäne Mathematik anfangs spielerisch, informell und eher von den vorfindbaren Umständen bestimmt, wird später eine zielgerichtete, anstrengungsorientierte Ausbildung wichtig. Für das Erreichen außergewöhnlicher Leistungen ist schließlich eine zunehmende Ausrichtung des gesamten Alltags auf die mathematische Weiterentwicklung notwendig, wobei das Individuum gegebenenfalls auch selbstständig nach entsprechenden Gelegenheiten suchen muss.

Damit ist die Bedeutung der Umwelt bereits angesprochen, also des Milieus, der Interventionen und bereitgestellten, dem jeweiligen Entwicklungsstand angemessenen Angebote zur Auseinandersetzung mit Mathematik, der Personen und besonderer (zufälliger) Ereignisse. Auch dieser Bereich unterliegt eingedenk der Plominschen passiven, reaktiven und aktiven Genotyp-Umwelt-Effekte teilweise genetischen Einflüssen (Oerter, 1992; Plomin, 1994). Sorgen zunächst häufig Familienmitglieder und später einfühlsame, begeisternde Lehrer für erste Entwicklungsschritte, sind später Meister-Lehrer und Experten als Mentoren bedeutsam, die über spezifische Lehrmethoden verfügen und für die der Leistungszuwachs im Vordergrund steht. Auch die Beziehung zu ähnlich Fortgeschrittenen wird im Laufe der Zeit immer wichtiger, die ermutigen, unterstützen, fordern, anleiten, helfen, inspirieren oder durch Konkurrenz motivieren.

Aus dem notwendig großen Umfang an Lernerfahrungen folgt die große Bedeutung nichtkognitiver Persönlichkeitsmerkmale. Nur durch enorme Motivation – deren Bedeutung kann wahrscheinlich gar nicht überschätzt werden –, durch Interesse, Hingabe, Anstrengungs- und Lernbereitschaft, durch Leistungsorientierung etc. ist es möglich, eine geeignete kognitive Ausstattung mit einem hinreichend großen Erfahrungsschatz zusammenzubringen (z. B. auch Gagné, 2004; Schneider, 1992; Subotnik, 2008).
Ist für die Aneignung von Grundlagen und den Aufbau einer angemessenen Arbeitshaltung sowie entsprechender (Übungs-) Gewohnheiten zunächst häufig ein gewisser Druck durch die Eltern notwendig und nützlich ist, so muss das Individuum im Laufe der Zeit zunehmend selbst Verantwortung für seine Entwicklung übernehmen, wofür u. a. auch Selbstvertrauen und soziale Kompetenzen notwendig sind.
Auch dieser Bereich ist genetisch beeinflusst, wie unter anderem die Arbeiten des Bremer Hirnforschers GERHARD ROTH zeigen (vgl. auch Ericsson et al., 1993; Weinert, 1997).

Insgesamt kann jedoch davon ausgegangen werden, dass der Einfluss angeborener domänenunspezifischer Merkmale des kognitiven Apparats zugunsten mathematikspezifischer Erfahrungen und deren Niederschlag auf diesen immer weiter zurückgeht (Heller, 1993). Und kommt zunächst dem unmittelbaren Umfeld des Individuums in der Bereitstellung günstiger Entwicklungsbedingungen eine besondere Bedeutung zu, werden auf dem langen Entwicklungsweg intrapersonale Faktoren immer wichtiger.

Auf dieser Grundlage bildet das Individuum im Laufe der Zeit mathematikspezifische Fähigkeiten, Handlungsmuster sowie eine spezifische Wissensbasis aus. Da allerdings im (schul-) mathematischen Bereich bereits ohne umfängliches Wissen auffallende Leistungen erreicht werden können, wird dieses in Abb. 9 durch einen relativ kleineren Flächenanteil symbolisiert. Die hier verwendete Beschreibung mathematikspezifischer Fähigkeiten ist in Anlehnung an DANIELA AßMUS (2008) formuliert. Unterschiedliche Aufzählungszeichen sollen veranschaulichen, dass nicht alle Fähigkeiten in gleichem Maße ausgeprägt sein müssen und dass es keinen einfachen additiven Zusammenhang bei diesen gibt (Krutetskii, 1976).

Fähigkeiten und Wissensbasis *können* sich situations- und aufgabenabhängig in besonderen Leistungen manifestieren. Aus dieser Einschränkung – durch einen lediglich gestrichelt gezeichneten Pfeil symbolisiert – ergeben sich nicht nur Schwierigkeiten hinsichtlich der Identifizierung einer sich entwickelnden Expertise, sondern darüber hinaus auch pädagogische Herausforderungen: Durch spezifische Fördermaßnahmen sollten sich die Schülerinnen und Schüler auch als besonders leistungsfähig erleben, sodass es zu positiv verstärkenden Rückkopplungen auf die Merkmalsbereiche kommen kann.

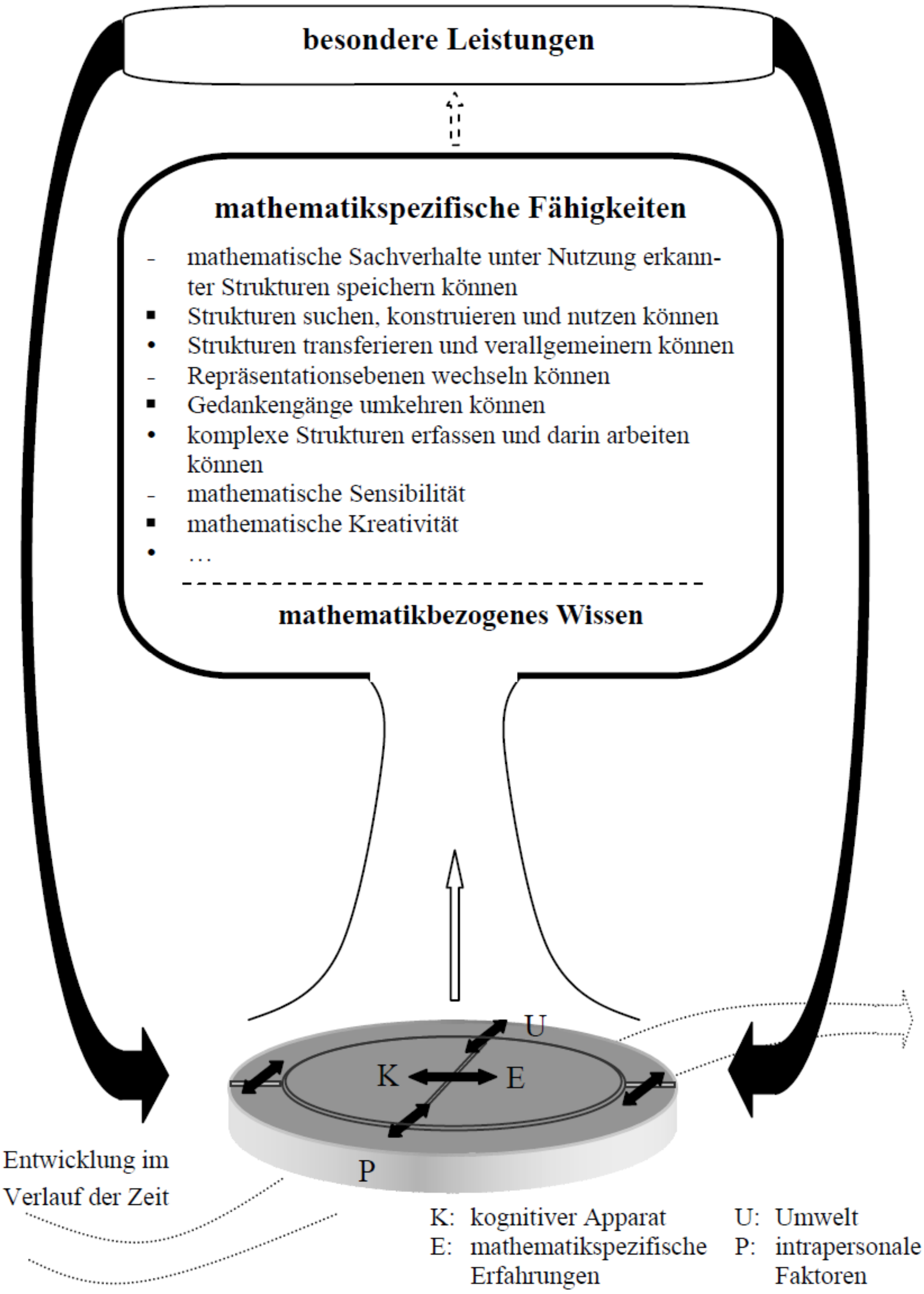


Abb. 9: Zur Entwicklung mathematischer Expertise (Fritzlar, 2013, S. 53)

Damit sind die Wechselwirkungen zwischen allen symbolisierten Elementen sowie deren Dynamik noch einmal angesprochen, die auch für die zentralen Elemente der Abbildung gilt: Im Voranschreiten der Expertiseentwicklung wird die fachspezifische Wissensbasis aus- und umgebaut (vgl. z. B. Waldmann et al., 2003; Waldmann & Weinert, 1990), es können weitere Fähigkeiten entwickelt oder bestehende in fachlich reichhaltigeren Kontexten realisiert werden.

Besondere Potenziale des Modells einer sich entwickelnden mathematischen Expertise sehe ich insbesondere in Folgendem:

- Einzelne Merkmalsbereiche, etwa der kognitive Apparat oder dessen geburtlich bestimmte Merkmale, verlieren in diesem Modell ihren Prädiktor-Charakter. Dies gilt auch für den aktuellen (jeweils gemessenen) Expertisegrad, der keine sichere Aussage darüber erlaubt, welches Niveau erreicht wird oder erreicht werden kann (Sternberg, 1998).
- Stattdessen wird betont, dass sich das Individuum im geeigneten Zusammenspiel aller beteiligten Merkmalsbereiche beständig weiterentwickeln muss, um die Art und den Grad von Expertise zu erreichen, die ihm den Zugang zu Förderprogrammen etc. ermöglichen bzw. die zur Identifizierung als „begabt" führen (Sternberg, 2000).
- Die Entwicklung außergewöhnlicher Leistungen wird nicht als autokatalytischer Prozess gesehen. Damit zusammenhängend kommt der Umwelt nicht nur eine defensive Funktion im Verhindern potenzieller „Störungen" zu. Vielmehr werden mathematikspezifische Lernerfahrungen und damit Lernangebote als notwendige Bedingung für die Weiterentwicklung der Expertise gesehen.
- Mit dem Modell der sich entwickelnden Expertise rücken mithin aufeinander aufbauende Lernprozesse in den Vordergrund; Lernen wird als mächtigster Mechanismus der kognitiven Entwicklung (Weinert, 2001) anerkannt Gleichzeitig wird auf die Verantwortung von Schule und Gesellschaft verwiesen, notwendige langfristige Lernaktivitäten durch gezielte mathematikspezifische Fördermaßnahmen rechtzeitig und kontinuierlich zu unterstützen.
- Als pädagogische Konsequenz erscheinen dabei zunächst möglichst inklusive statt exklusive Förderangebote angemessen.
- Wie in anderen fachspezifischen Modellen beispielsweise von FRIEDHELM KÄPNICK und MANDY FUCHS (Käpnick, 2006) wird zwischen einer u. a. kognitiven „Grundausstattung", mathematikspezifischen Fähigkeiten und besonderen Leistungen unterschieden, womit auch deren Kontextabhängigkeit und damit beispielsweise das Problem der Identifikation oder auch der Initiierung positiver Rückwirkungen angesprochen ist.
- Mit letzteren sind die im Modell betonten Wechselwirkungen zwischen den Bereichen und Elementen sowie deren Dynamik, allgemeiner der systemische Charakter von Expertise (Ziegler & Phillipson, 2012) angesprochen: der aktuelle Expertisegrad erscheint gleichzeitig als emergente Eigenschaft und Element eines Systems, das u. a. durch Vernetztheit, Dynamik und Äquifinalität gekennzeichnet ist.

Aktuelle Arbeiten im Grundschulbereich

Ursprünglich wollte ich Ihnen aktuelle Arbeiten zu mathematischen Begabungen im Grundschulbereich detailliert vorstellen. Aber im Rahmen eines einzigen Vortrags, auch wenn er eine volle Stunde ausfüllen darf, ist dies wohl doch nicht möglich. Deshalb möchte ich wenigstens versuchen, Ihnen auch anhand der folgenden Aufzählung die Vielfalt allein der mathematikdidaktischen Arbeiten in Deutschland anzudeuten und dann wenige, notwendig subjektiv ausgewählte Schlaglichter setzen.

- *Mathematische Begabungen und Intelligenz:* MARIANNE NOLTE (2011, 2012), THOMAS GAWLICK & DIEMUT LANGE (2010)
- *Charakterisierung mathematischer Begabungen:* CLAUDIA LACK (2008), DANIELA AßMUS (2007, 2008), KATHRIN TALHOFF (2012)
- *„Begabungsmerkmale":*
  - *Erkennen/Konstruieren und Nutzen von Mustern und Strukturen:* MARIANNE NOLTE (2010), NADINE EHRLICH (2012)
  - *Umkehren von Gedankengängen:* DANIELA AßMUS (2010a, 2010b), TORSTEN FRITZLAR (2010)
  - *Wechseln der Repräsentationsebene:* TORSTEN FRITZLAR & FRANK HEINRICH (2010)
  - *Transfer:* DANIELA AßMUS (2013), DANIELA AßMUS & FRANK FÖRSTER (2012, 2013)
  - *Raumvorstellungsvermögen*: NINA BERLINGER (2011)
  - *Umgehen mit Komplexität:* SIEGBERT SCHMIDT (2010)
  - *Intuition*: FRIEDHELM KÄPNICK (2008, 2010)
- *Vorgehensweisen beim Problemlösen:* MANDY FUCHS (2006), ASTRID HEINZE (2005), MARIANNE NOLTE (2004, 2008), EMAD SEFIEN (2007)
- *Mathematische Begabungen und algebraisches Denken:* SIEGBERT SCHMIDT (2008), SIEGBERT SCHMIDT & WERNER WEISER (2008), JOACHIM HRZÁN & EMAD SEFIEN (2009a, 2009b), JOACHIM HRZÁN (2010), TORSTEN FRITZLAR & NADJA KARPINSKI-SIEBOLD (2011, 2012)
- *Mathematisch begabte Mädchen:* RALF BENÖLKEN (2011, 2013)
- *Mathematische Begabungen im Kontext Inklusion:* MARIANNE NOLTE (2013b)

Auf die Arbeit von MARIANNE NOLTE zur Beziehung von mathematischen Begabungen und Intelligenz bin ich bereits eingegangen. Gestützt werden deren Resultate auch durch die Studie von THOMAS GAWLICK und DIEMUT LANGE, in der die konfirmatorische Faktorenanalyse genutzt wurde, um Wirkungsmodelle zu Ergebnissen eines Intelligenz- und eines Mathematiktests zu Beginn der fünften Schuljahrgangsstufe zu testen. Die beste Passung ließ sich mit einem Modell erreichen, in dem allgemeine Intelligenz und ein postulierter Begabungsfaktor Mathematik als voneinander unabhängig angenommen wurden.

In ihrer im Jahr 2008 abgeschlossenen Dissertation untersuchte CLAUDIA LACK, inwieweit ein Aufdecken mathematischer Begabungen bereits bei Schülerinnen und Schülern der ersten und zweiten Jahrgangsstufe möglich ist. Dabei war es nicht ihr Ziel, ein Merkmalsystem zu konstruieren oder zu überprüfen; vielmehr ging sie der Frage nach, welche aufgabenspezifischen Vorgehensweisen und heuristischen Strategien oder Strategiekeime[1] mathematisch interessierte Kinder dieser Altersstufe bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemstellungen bereits nutzen. Während sich CLAUDIA LACK also eher explorativ möglichen besonderen Fähigkeiten und Handlungsmustern mathematisch interessierter Erst- und Zweitklässler näherte, ist die Entwicklung eines empirisch abgesicherten Merkmalsystems für mathematisch begabte Zweitklässler Hauptziel des aktuellen Dissertationsprojekts von DANIELA AßMUS. Ähnlich zur Studie von KÄPNICK konzipierte sie ein vorläufiges Merkmalsystem auf der Grundlage sehr umfang- und detailreicher theoretischer Analysen und sie entwickelte spezielle Indikatoraufgaben, die in einer empirischen Untersuchung mit etwa 180 durch Lehrernomination und prozessorientierte Beobachtung ausgewählten Zweitklässlern sowie einer Vergleichsgruppe aus etwa 70 Schülerinnen und Schülern eingesetzt wurden. Die Teilnehmer bearbeiteten die Indikatoraufgaben schriftlich, im Anschluss fanden zusätzlich Einzelinter-

[1] Aufscheinende Muster in Problembearbeitungsprozessen, bei denen eine strategische Absicht noch nicht unterstellt werden kann, diese aber in der Zone der nächsten Entwicklung liegt, lassen sich nach Stein (1996) als Strategiekeime bezeichnen.

views zu ihren Vorgehensweisen und Lösungen statt, sodass auch qualitative Analysen möglich wurden. Ergänzt wurden diese Erhebungen durch zahlreiche Einzelfallstudien, vertiefende Nachuntersuchungen zu ausgewählten potenziellen Begabungsmerkmalen sowie durch zum Teil vergleichende Langzeitbeobachtungen. Bereits 2007 konnte DANIELA AßMUS eine vorläufige Fassung des Merkmalsystems zur Charakterisierung mathematischer Begabungen bei Zweitklässlern vorlegen (Aßmus, 2007).

Zahlreiche Studien gab es in den vergangenen Jahren zu einzelnen Begabungsmerkmalen, besonders umfangreiche unter diesen sind die kürzlich fertiggestellte Dissertation von NADINE EHRLICH (2012) zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen sowie das derzeit laufende Dissertationsprojekt von NINA BERLINGER zum Raumvorstellungsvermögen mathematisch begabter Grundschulkinder. Der Zusammenhang zwischen mathematischer Begabung und Raumvorstellungsvermögen ist bislang noch nicht abschließend geklärt. Während es bei KIEßWETTERS Denk- und Handlungsmustern keine Entsprechung gibt, KRUTETSKII entsprechende Fähigkeiten als günstig und gegebenenfalls begabungstypbestimmend, jedoch nicht als notwendig ansieht, bezeichnet PETER BARDY in seinem umfassenden Lehrbuch zu mathematisch begabten Grundschulkindern das Raumvorstellungsvermögen als eine der „wichtigsten geistigen Fähigkeiten, die es uns gestatten, Mathematik zu betreiben“ (Bardy, 2007, S. 31). In einer ganz spezifisch ausgerichteten Untersuchung geht daher NINA BERLINGER derzeit der Frage nach, „welche Bedeutung das räumliches Vorstellungsvermögen für die Kennzeichnung einer mathematischen Begabung bei Dritt- / Viertklässlern hat“ (Berlinger, 2011, S. 95).

Die den Terminus *Begabungsmerkmale* einschließenden Anführungszeichen sollen übrigens meiner Überzeugung Ausdruck verleihen, dass die aufgeführten Untersuchungen nicht nur für vermeintliche Randgruppen ertragreich sind.

Fallstudien zur Nutzung algebraischer Elemente durch leistungsstarke Grundschulkinder liegen beispielsweise von JOACHIM HRZÁN, SIEGBERT SCHMIDT und WERNER WEISER vor. Ausgehend von diesen Erfahrungen und von algebraischen Bezügen, die einige der zur Charakterisierung mathematischer Begabungen genutzten Merkmale aufweisen, scheint es sinnvoll, nach besonderen algebraischen Fähigkeiten mathematisch begabter Grundschüler zu fragen. Eine Antwort sucht NADJA KARPINSKI-SIEBOLD in ihrem aktuellen Dissertationsprojekt.

Auch die im Jahr 2011 abgeschlossene Studie von RALF BENÖLKEN zu mathematisch begabten Mädchen war ein Dissertationsprojekt, das mathematische Begabung nicht nur als psychologisches, sondern auch als ein sozio-kulturelles Phänomen sieht. Ausgangspunkt war die meist sehr deutliche Unterrepräsentanz von Mädchen in mathematischen Wettbewerben und Projekten der Begabtenförderung auch schon im Grundschulalter, die im Kontrast zum wissenschaftlichen Konsens steht, wonach beide Geschlechter im Grundsatz über gleiche Begabungspotenziale in allen akademischen Bereichen verfügen. Ein Hauptziel der Arbeit war es deshalb, aus begabungstheoretischer Perspektive eventuelle Besonderheiten mathematisch begabter Mädchen zu erforschen, die dann insbesondere auch für eine differenziertere Identifikation und Förderung berücksichtigt werden könnten.

Mathematikspezifische Fähigkeiten und Merkmale, die in verschiedenen Arbeiten zur Beschreibung mathematischer Begabungen genutzt werden, sind ein derzeit stark bearbeitetes Themenfeld. Und dies aus guten Gründen. Unter anderem ist es stark interdisziplinär orientiert, mit besonders ausgeprägten Zügen zur Psychologie – was mir sehr interessant erscheint. Aber vielleicht wichtiger: Vergleicht man die verschiedenen Beschreibungsansätze zu mathematischen Begabungen lassen sich neben zahlreichen Gemeinsamkeiten auch Unterschiede feststellen. So werden zum Teil verschiedene charakterisierende Fähigkeiten benannt, aber auch bei gleich benannten Fähigkeiten werden teilweise unterschiedliche Akzentuierungen deutlich – sowohl in deren Verständnis als auch darin, wie die Forscherinnen und Forscher die Ausprägung dieser Fähigkeiten zu erfassen suchen. Und diese Unterschiede haben ihre Ursache nicht allein darin, dass teilweise verschiedene Altersgruppen untersucht wurden. Nur auf eines dieser Begabungsmerkmale – den Repräsentationswechsel – kann ich noch genauer eingehen.

Repräsentationswechsel & Multimodalität

Die Bedeutung des „Sich-ein-Bild-Machens“, des Umgehens mit Visualisierungen für mathematisches Tätigsein wird in der didaktischen Literatur immer wieder betont. Dabei sind die „Bilder im Kopf“ nicht nur subjektive Eindrücke zu den im Gehirn ablaufenden Prozessen; vielmehr ist die Modalitätsspezifik mentaler Repräsentationen wissenschaftlich gut gesichert. Sowohl mit psychophysikalischen als auch mit neurowissenschaftlichen Methoden lässt sich nachweisen, dass es neben der begrifflichen Repräsentation internen Wissens auch eine bildhaft-anschauliche gibt. So wurde beispielsweise experimentell gezeigt, dass bei entsprechenden Aufgabenstellungen die Bearbeitungszeit von der Größe des induzierten Vorstellungsbildes, von der Länge des zurückgelegten Weges bei der mentalen Navigation oder vom Drehwinkel bei der mentalen Rotation abhängig ist.[2] Neurowissenschaftlich lassen sich beispielsweise Anforderungen zur mentalen Rotation und zur mentalen Arithmetik anhand elektrophysiologischer Größen topologisch unterscheiden und die mentale Navigation ist durch Aktivation ausgezeichneter kortikaler Netzwerke gekennzeichnet (vgl. Krause, 2000).

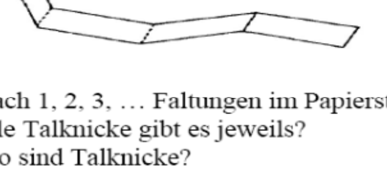
Allgemeiner scheint es für erfolgreiches mathematisches Arbeiten bedeutsam, eine geeignete bildhaft-anschauliche oder symbolische Repräsentation und damit Modalität zu finden, bei Bedarf – beispielsweise wenn der aktuell eingeschlagene Weg nicht weiterführt oder zu aufwändig wird – zwischen diesen zu wechseln oder aber beide „Denkmedien“ gleichzeitig zu nutzen. Ein leicht verständliches und dennoch mathematisch sehr reichhaltiges Beispiel möchte ich Ihnen mit Abb. 10 vorstellen.

Während Sven eine bildhaft-anschauliche Repräsentation ausgebildet hat, arbeitet Emily auf der begrifflich-symbolischen Ebene. Auch Christoph arbeitet sozusagen symbolisch, die von ihm genutzten Zahlen mit ihren arithmetischen Strukturen eröffnen ihm jedoch viel weitergehende Bearbeitungsmöglichkeiten.

Übrigens wird m. E. nebenbei deutlich, dass es nicht immer die „beste“ Repräsentation geben muss, denn beispielsweise kann Christoph zwar die Orte und damit die Anzahl der Talknicke auch für eine hohe Zahl von Halbierungen vorhersagen, die Symmetrie des Papierstreifens ist allerdings nur schwer zu erkennen.

Ein geknickter Papierstreifen

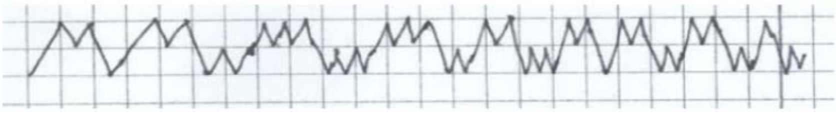
Ein Papierstreifen wird durch eine Faltung von rechts nach links halbiert. Es entsteht ein „Doppelstreifen“, der auf die gleiche Weise halbiert wird, usw. Nach n derartigen Faltungen wird der Streifen wieder vollständig aufgeklappt.



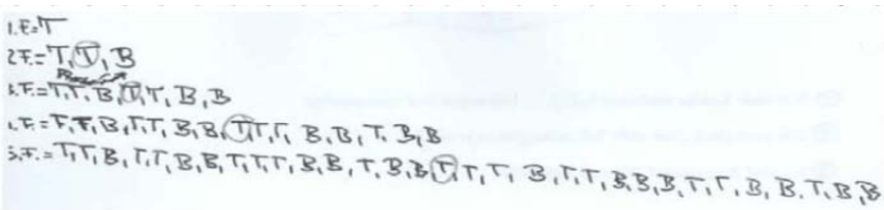
Wie viele Knicke sind nach 1, 2, 3, … Faltungen im Papierstreifen?
Wie viele Berg-, wie viele Talknicke gibt es jeweils?
Wo sind Bergknicke? Wo sind Talknicke?

[2] Allerdings wurde in einer Reihe von Experimenten deutlich, dass bei einer Zunahme der Komplexität der verwendeten Figuren Versuchspersonen von einer bildhaft-anschaulichen, holistischen zu einer eher analytischen Bearbeitung übergehen (Goldin, 1998).

Filip (10;6) fährt mit den Fingern am Streifen entlang: „Dort, wo links ein Tal ist, ist rechts ein Berg und umgekehrt.“

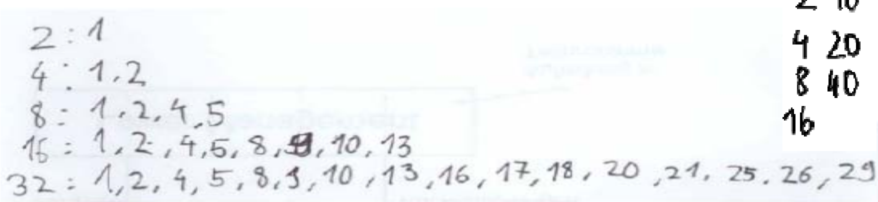


Sven (11;11)



Emily (12;3)

Christoph (12;1) protokolliert die Nummern der Talknicke. Bei der Suche nach Mustern zwischen den Zahlen der sich ergebenden Folge ordnet er diese in einem zweidimensionalen Schema an. Schließlich findet er die abgebildete (völlig korrekte) Formel für die Nummern aller Talknicke.



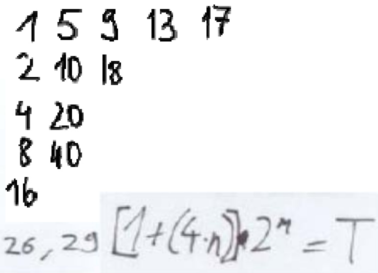


Abb. 10: Ein geknickter Papierstreifen (z. B. Albers, 2006) und ausgewählte Schülerbearbeitungen

Das Umgehen mit visuellen Vorstellungen gilt als bedeutsam (Dreyfus, 1994; Presmeg, 1986), das Wechseln der Repräsentation oder der Repräsentationsebene bzw. Modalität als ganz wesentliche heuristische Strategie (Zimmermann, 2005). Entsprechende Fähigkeiten haben sich, wenn sie in mathematisch hinreichend reichhaltigen Situationen umgesetzt werden, in einschlägigen mathematikdidaktischen Untersuchungen aber auch als Indikator für mathematische Begabungen im Schulalter erwiesen (Aßmus, 2007; Käpnick, 1998; Kießwetter, 1985). Dies lässt sich auch kognitionspsychologisch und neurowissenschaftlich untermauern.

In einem Aufsatz aus dem Jahr 2008 fasst Michael O’Boyle (2008) zahlreiche Untersuchungen zusammen, in denen mathematisch begabte oder leistungsstarke Kinder und Jugendliche (nach dem Ergebnis im SAT-Mathematiktest) mit durchschnittlich leistungsstarken verglichen werden, anhand von Reaktionszeiten, Wahrnehmungsfähigkeiten, Entscheidungstendenzen oder mittels bildgebender Verfahren.

In einer dieser Untersuchungen sollten Probanden beispielsweise vertikal geteilte Gesichter – eine lächelnde und eine neutrale Hälfte wurden dabei kombiniert – hinsichtlich ihres Gesichtsausdrucks bewerten. Abb. 11 zeigt zwei Beispiele:

Abb. 11: „Chimeric faces“ (Bourne, 2008, S. 93; O'Boyle, 2008, S. 138)

Ich weiß natürlich nicht, wie es ihnen geht. Üblicherweise gibt es eine deutliche Tendenz zugunsten der im linken Gesichtsfeld des Betrachters lächelnden Gesichter, da die für die Verarbeitung derartiger Reize zuständigen Netzwerke sich in der rechten Gehirnhälfte befinden. Diese Tendenz ist nun in der Gruppe der mathematisch Begabten deutlich stärker ausgeprägt, Dies wird interpretiert als verstärkte Entwicklung und Aktivierung der rechten Gehirnhälfte, was den mathematisch Begabten u. a. ein stärkeres visuell-räumliches Denken ermöglicht (Desco et al., 2011). Bestätigt werden diese Ergebnisse beispielsweise durch Experimente zum links- und rechtsseitigen Silbenverständnis, die zeigen, dass bei mathematisch begabten Versuchspersonen die rechte Gehirnhälfte selbst am Sprachverständnis beteiligt ist.

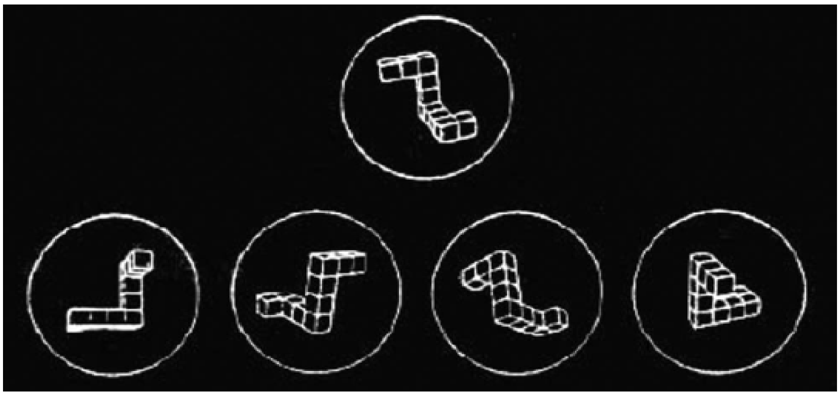


Abb. 12: Aufgabe zur mentalen Rotation

Abb. 12 zeigt eine Aufgabe aus einem Experiment zur mentalen Rotation, bei dem mittels funktioneller Kernspintomographie die beteiligten kortikalen Netzwerke der Versuchspersonen identifiziert wurden, die folgende Abbildung gibt entsprechende Aufnahmen eines mathematisch durchschnittlichen und eines begabten Kindes wieder.

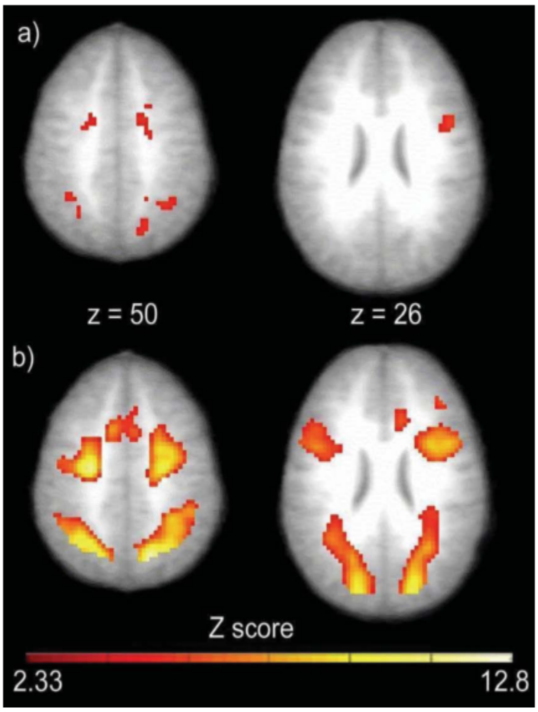


Abb. 13: Neuronale Aktivität bei der Bearbeitung von Aufgaben zur mentalen Rotation (O'Boyle, 2008, S. 184)

Sie sehen eine höhere Aktivierung und eine Aktivierung zusätzlicher Areale oder Netzwerke beim begabten Kind. Auch dieses Ergebnis wurde mehrfach bestätigt, insgesamt lässt sich sagen, dass bei mathematisch begabten Kindern und Jugendlichen eine gesteigerte Entwicklung der rechten Hemisphäre vorfindbar ist, die einen funktionalen Bilaterismus ermöglicht, dass eine verstärkte Kommunikation und Kooperation zwischen beiden Gehirnhälften beobachtet werden kann und dass die Aktivierung kortikaler Netzwerke und Areale stärker ist als bei mathematisch durchschnittlich leistungsstarken Kindern und Jugendlichen, was zu einer höheren kognitiven Leistungsfähigkeit führt (O'Boyle, 2008, S. 184).[3]

[3] Letzteres trifft nicht zu für Gebiete der exekutiven Kontrolle, z. B. Foth & van der Meer (2013).

Mathematisch begabte Kinder und Jugendliche – das scheint mir ein wichtiger Punkt – denken also nicht schneller oder effektiver, sondern anders. Ihre neuronale Aktivität unterscheidet sich sowohl in der Höhe als auch in der Lokalisation.

In einer kürzlich in Spanien durchgeführten Vergleichsstudie (Desco et al., 2011), bei der die mathematisch begabten Teilnehmer übrigens mit dem von KARL KIEßWETTER entwickelten Hamburger Test für mathematische Begabung identifiziert wurden, zeigte sich noch etwas differenzierter, dass Gruppenunterschiede zwischen mathematisch begabten und durchschnittlich leistungsstarken Schülerinnen und Schülern bezüglich der neuronalen Aktivität dann besonders groß sind, wenn anspruchsvolle Aufgaben bearbeitet werden.

Wobei man zugeben muss, dass die in solchen Untersuchungen von Psychologen verwendeten Aufgaben meist aus Intelligenztests stammen oder zumindest leicht formalisierbare geschlossene Aufgaben sind. Vor etwa zehn Jahren wurde in Jena eine ähnliche Studie durchgeführt, an der zwar mathematisch begabte und durchschnittlich leistungsstarke Oberstufenschüler – also ältere Probanden – beteiligt waren, für die aber FRANK HEINRICH als Mathematikdidaktiker mathematisch hinreichend reichhaltige Problemstellungen entwarf, die sowohl in der symbolischen, als auch in der bildhaft-anschaulichen Modalität bearbeitet werden konnten. Dabei zeigten die mathematisch Begabten erwartungsgemäß bessere Leistungen, allerdings waren diese durch die traditionellen Maße der Experimentalpsychologie nicht erklärbar: Bezüglich IQ oder Gedächtniskapazität waren Unterschiede zwischen den beiden Versuchspersonengruppen nicht signifikant. Durch eine Analyse der EEG-Aufzeichnungen konnte jedoch nachgewiesen werden, dass bei mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern bereits innerhalb der ersten Sekunde nach dem Instruktionsverstehen jene Hirnregionen aktiviert waren, die für die begriffliche und die bildhaft-anschauliche Modalität verantwortlich gemacht werden, wohingegen bei Normalbegabten eine solche doppelte Aktivation nicht nachweisbar war. Bei einzelnen Schülern aus der Versuchsgruppe konnten außerdem bereits innerhalb der ersten zehn Sekunden einer Problembearbeitung mehrfache Wechsel der Aktivation zwischen Arealen der begrifflichen und der bildhaft-anschaulichen Modalität nachgewiesen werden; wobei allerdings Gruppenunterschiede nicht signifikant waren (Krause, Seidel, & Heinrich, 2004).

Mit Blick auf das hier betrachtete Begabungsmerkmal lässt sich vielleicht zusammenfassend sagen: Mathematisch begabte Schülerinnen und Schüler scheinen sich u. a. durch eine stärkere Multimodalität des Denkens auszuzeichnen, die es ihnen leichter ermöglicht, Repräsentationen zu wechseln. Können sie mathematische Herausforderungen dadurch häufiger erfolgreich bewältigen, wird sich ein entsprechendes Handlungsmuster ausbilden, mit dessen Verfügbarkeit auch in mathematisch reichhaltigen Situationen sich die begabten Schülerinnen und Schüler ebenfalls abheben werden. Diese voneinander selbstverständlich nicht unabhängigen Ebenen – die Ebene der involvierten kognitiven Prozesse und Strukturen, die Ebene der sich zunehmend spezifizierenden Fähigkeiten und die der Denk- und Handlungsmuster – lassen sich auch für weitere Begabungsmerkmale unterscheiden. Beispielsweise würde ich die bereits vorgestellten Aufgaben aus den Untersuchungen von KRUTETSKII (s. Abb. 4) in Bezug zur zweiten Ebene setzen, aber nicht zur dritten, auf der dann das Rückwärtsarbeiten liegen würde, eine heuristische Strategie mit der sich beispielsweise GEORGY PÓLYA intensiv auseinandergesetzt hat. Auch für das Merkmal „Transfer“ bzw. damit zusammenhängend für das Konstruieren und Nutzen von Analogien lässt sich zwischen diesen Ebenen unterscheiden, wie DANIELA AßMUS und FRANK FÖRSTER (2013) kürzlich herausgearbeitet haben.

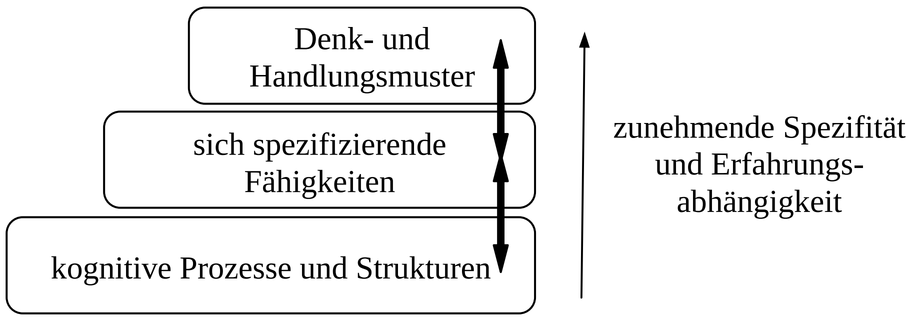


Abb. 14: Verschiedene Ebenen zu Begabungsmerkmalen

Interessiert man sich für ein Begabungsmerkmal näher, ist zum einen natürlich die jeweilige Anforderungssituation zu berücksichtigen, die jedenfalls hinreichend komplex sein muss. Zum anderen sollte man meines Erachtens klären, welche der in Abb. 14 symbolisierten Ebenen man fokussiert. Gerade im Zusammenhang mit der Identifikation von mathematisch begabten Schülerinnen und Schülern ist dann zu bedenken, dass von Ebene zu Ebene die Spezifität, aber auch die Erfahrungsabhängigkeit zunehmen.

Ausblick

In meinem Vortrag wollte ich Ihnen zeigen, was man unter mathematischen Begabungen verstehen kann, ich wollte Ihnen zeigen, dass in den vergangenen Jahren auf diesem Gebiet gerade in Bezug auf das Grundschulalter viel passiert ist, nicht nur förderpraktisch, sondern auch in der mathematikdidaktischen Forschung in Deutschland. Natürlich konnte ich lediglich einen kleinen und subjektiven Ausschnitt darstellen, Skizzen weiterer Projekte finden Sie beispielsweise in einem aktuellen Sonderheft der *mathematica didactica.*

Kommunikation

Arbeitet man mit begabten Schülerinnen und Schülern, wird man auch schon bei jüngeren Kindern oftmals Zeuge einer verkürzten Kommunikation, wenige und gelegentlich wenig passende Worte genügen anscheinend, um sich über reichhaltige Ideen auszutauschen. In diesem sich andeutenden weitreichenden Verstehen äußert sich nach HEINRICH BAUERSFELD „eine bemerkenswerte Rekonstruktionsfähigkeit, die den Inhalt einer Mitteilung, das Gemeinte, aus wenigen Bruchstücken zu (re-)konstruieren ermöglicht, Informationslücken (im Sinne des normalen Beobachters) zu füllen und Kontexte zu ergänzen gestattet. Man versteht einander mit mehr Tiefe und zugleich mit weniger Aufwand“ (1988, S. 82). Und im selben Aufsatz empfiehlt BAUERSFELD: „Zusammenfassend läßt sich bei aller Vorläufigkeit der Beobachtungen und der gebotenen Zurückhaltung bei den Extrapolationen doch sagen, daß man wohl kaum ins Leere hinein forschen würde, wenn man die Spezifika der Kommunikation von Hochbegabten untereinander und mit anderen eingehender untersuchte. Die sich dabei als erklärungsmächtig erweisenden Theoriemodelle könnten für die Klärung normaler Lehr-Lern-Prozesse ebenso wichtig werden, wie es von der anderen Seite der Skala her die Erkenntnisse über extreme Lernschwierigkeiten und -behinderungen mit Selbstverständlichkeit geworden sind (...).“ (S. 84)

Intuition

Intuitionen gelten – weil sie eben schwer zu fassen sind – erst in jüngerer Zeit als seriöses Forschungsthema der Psychologie, unter anderem mit GERD GIGERENZERS „Bauchentscheidungen“ sind sie vielleicht sogar zu einem Modethema geworden. Nichtsdestotrotz kommt ihnen eine große Bedeutung zu und können sie die rationale Seite wesentlich ergänzen, wenn es beispielsweise um Entscheidungen unter Intransparenz, Unsicherheit oder Zeitdruck geht. Die Bedeutung von Intuitionen beim mathematischen Tätigsein wird auch von vielen Fachwissenschaftlern betont. FRIEDHELM KÄPNICK konnte sie häufig beim Problemlösen bei mathematisch begabten Kindern beobachten und die Bedeutung dieses unvermittelten, oft auch ganzheitlichen Erfassens eines Sachverhalts exemplarisch aufzeigen. Intuitionen könnten für das Problemlöseverhalten gerade auch von mathematisch begabten Kindern aufgrund ihres teils sprunghaften, an Empfindungen und Bildwelten gebundenen Denkens, ihres häufig offenen Herangehens, auch weil Routinen noch weitgehend fehlen, und ihrer Sensibilität für Mathematik sehr bedeutsam sein (Käpnick, 2008, 2010).

Wissen

In einem gewissen Spannungsverhältnis zu Intuitionen steht Wissen, dass für die Begabungsforschung vor allem auch durch ihre Annäherung an die Expertiseforschung und schon berichtete Synthesebemühungen an Bedeutung gewinnt. Auch Lernpsychologen wie ELSBETH STERN betonen – unabhängig von Begabungen – immer wieder die Bedeutung von Wissen und dessen Vorrangstellung in Bezug auf Intelligenz (Stern, 2003). Allerdings spielt Wissen wohl im elementarmathematischen Bereich eine geringere Rolle als in anderen Disziplinen wie beispielsweise der Geschichtswissenschaft. Auch deshalb sehe ich hinsichtlich dieses Punktes weiteren Forschungsbedarf.

Sind dies eher theoretische Aspekte, so ist mir aus methodologischer Sicht der Wunsch nach Langzeitstudien wichtig, für die beispielsweise durch den Ausbau und die Vernetzung von Förderangeboten an den Universitäten in Münster, in Hamburg oder Berlin günstige Voraussetzungen geschaffen wurden.

In der Förderpraxis hat es in den vergangenen Jahren unter anderem einen stärkeren Fokus auf Mädchen gegeben. Auch dies scheint mir wichtig: Die Zahl der intellektuell hochbegabten Jungen und Mädchen ist vergleichbar, an deutschen Gymnasien gibt es durchschnittlich mehr Mädchen als Jungen, dennoch sind in mathematikbezogenen Förderangeboten, Wettbewerben oder schulischen Programmen stets deutlich weniger Mädchen als Jungen vertreten. Dies gilt auch schon für das Grundschulalter. Bedenkt man den großen Einfluss von Interesse und Motivation, kommt es wohl insbesondere darauf an, bereits im Vor- und Grundschulalter noch mehr Gelegenheiten für Jungen und eben auch für Mädchen zu schaffen, mathematische Interessen zu entwickeln (Foth & van der Meer, 2013).

Eine konsistente Theorie zu mathematischer Begabung liegt noch nicht vor, so formulierte es ELSBETH STERN im Jahr 2005 (Stern, 2005, S. 295). Dies ist angesichts verschiedener Vorstellungen von Mathematik, entsprechend unterschiedlicher methodischer Ansätze und verschiedener Untersuchungs- oder Beschreibungsebenen nicht verwunderlich. Ich hoffe, ich konnte Ihnen zeigen, dass wir im mathematikdidaktischen Bereich dennoch ein gutes Stück des Weges vorangekommen sind – auch im internationalen Vergleich –, vorangekommen auf einem Weg, der noch lange nicht zu Ende ist und weiter in interessante Gebiete führt.

Literatur

Albers, R. (2006). *Papierfalten.* Dissertation, Universität Bremen, Bremen.

Aßmus, D. (2007). Merkmale und Besonderheiten mathematisch potentiell begabter Grundschüler – aktuelle Forschungsergebnisse. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2007* (S. 246–249). Hildesheim: Franzbecker.

Aßmus, D. (2008). Merkmale mathematisch potentiell begabter Zweitklässler. In M. Fuchs & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematisch begabte Kinder. Eine Herausforderung für Schule und Wissenschaft* (S. 59–69). Berlin: LIT.

Aßmus, D. (2010a). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 137–140). Münster: WTM.

Aßmus, D. (2010b). Fähigkeiten im Umkehren von Gedankengängen bei potentiell mathematisch begabten Grundschulkindern. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 45–61). Offenburg: Mildenberger.

Aßmus, D. (2013). Fähigkeiten im analogen Denken bei mathematisch begabten Kindern: Begriffsklärung und Überblick zu empirischen Studien. *mathematica didactica, 36*, 28–44.

Aßmus, D., & Förster, F. (2012). Fähigkeiten zur Analogieerkennung und zum Transfer mathematischer Strukturen bei mathematisch begabten Grundschulkindern. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 89–92). Münster: WTM.

Aßmus, D., & Förster, F. (2013). ViStAD – Erste Ergebnisse einer Video-Studie zum analogen Denken bei mathematisch begabten Grundschulkindern. *mathematica didactica, 36*, 45–65.

Bardy, P. (2007). *Mathematisch begabte Grundschulkinder: Diagnostik und Förderung.* München: Elsevier.

Bauersfeld, H. (1988). Extrapolationen aus Mikroanalysen mathematischer Lehr-Lern-Prozesse zur möglichen Förderung sogenannter Hochbegabter. In K. Kießwetter (Hrsg.), *Berichte aus der Forschung: Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern* (S. 69–89). Universität Hamburg.

Benbow, C. P., & Minor, L. L. (1990). Cognitive Profiles of Verbally and Mathematically Precocious Students: Implications for Identification of the Gifted. *Gifted Child Quaterly, 34*(1), 21–26.

Benölken, R. (2011). *Mathematisch begabte Mädchen: Untersuchungen zu geschlechts- und begabungsspezifischen Besonderheiten im Grundschulalter.* Münster: WTM.

Benölken, R. (2013). Geschlechtsspezifische Besonderheiten in der Entwicklung mathematischer Begabungen. *mathematica didactica, 36*, 66-96.

Berlinger, N. (2011). Untersuchungen zum räumlichen Vorstellungsvermögen mathematisch begabter Dritt- und Viertklässler. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 95–98). Münster: WTM.

Bloom, B. S. (Ed.) (1985). *Developing Talent in Young People.* New York: Ballantine Books.

Bourne, V. J. (2008). Chimeric Faces, visual field bias, and reaction time bias: Have we been missing a trick? *Laterality, 13*(1), 92–103.

Desco, M., Navas-Sanchez, F. J., Sanchez-González, J., Reig, S., Robles, O., Franco, C., et al. (2011). Mathematically gifted adolescents use more extensive and more bilateral areas of the fronto-parietal network than controls during executive functioning and fluid reasoning tasks. *NeuroImage, 57*, 281–292.

Dreyfus, T. (1994). Advanced Mathematical Thinking Processes. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

Ehrlich, N. (2012). *Strukturierungskompetenzen mathematisch begabter Sechst- und Siebtklässler: Theoretische Grundlegung und empirische Untersuchungen zu Niveaus und Herangehensweisen.* Dissertation, Universität Münster, Münster.

Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Römer, C. (1993). The Role of Deliberate Practice in the Acquisition of Expert Performance. *Psychological Review, 100*(3), 363–406.

Foth, M., & van der Meer, E. (2013). Mathematische Leistungsfähigkeit: Prädiktoren überdurchschnittlicher Leistungen in der gymnasialen Oberstufe. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 211–240). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2010). Gedankensplitter zum „Umkehren mentaler Prozesse“ – gedacht zur Anregung weiterer Diskussionen. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler* (S. 27–39). Münster: WTM.

Fritzlar, T. (2013). Robert – Zur Entwicklung mathematischer Expertise bei Kindern und Jugendlichen. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven* (S. 41–59). Münster: WTM.

Fritzlar, T., & Heinrich, F. (2010). Doppelrepräsentation und mathematische Begabung im Grundschulalter – Theoretische Aspekte und praktische Erfahrungen. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 25–44). Offenburg: Mildenberger.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2011). Algebraic thinking of primary students. In B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 345–352). Ankara: PME.

Fritzlar, T., & Karpinski-Siebold, N. (2012). Continuing patterns as a component of algebraic thinking – an interview study with primary students. In *ICME 12 Pre-proceedings* (pp. 2022–2031). Seoul.

Fuchs, M. (2006). *Vorgehensweisen mathematisch potentiell begabter Dritt- und Viertklässler beim Problemlösen - Empirische Untersuchungen zur Typisierung spezifischer Problembearbeitungsstile.* Münster: LIT.

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15*(2), 119–147.

Gawlick, T., & Lange, D. (2010). Allgemeine vs. mathematische Begabung bei Fünftklässlern. In A. Lindmeier & S. Ufer (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2010* (S. 329–332). Münster: WTM.

Giger, M. (2009). Termans Kinder – Erkenntnisse aus der Langzeitstudie. *SwissGifted*, *2*(2), 73–78.

Goldin, G. A. (1998). Representational Systems, Learning, and Problem Solving in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137–165.

Heilmann, K. (1999). *Begabung – Leistung – Karriere: Die Preisträger im Bundeswettbewerb Mathematik 1971–1995.* Göttingen: Hogrefe.

Heinze, A. (2005). *Lösungsverhalten mathematisch begabter Kinder – aufgezeigt an ausgewählten Problemstellungen.* Münster: LIT.

Heller, K. A. (1993). Structural Tendencies and Issues of Research on Giftedness and Talent. In K. A. Heller, F. J. Mönks, & A. H. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (1st ed., pp. 49–69). Oxford: Pergamon.

Heller, K. A. (2010). The Munich Model of Giftedness and Talent. In K. A. Heller (Ed.), *Munich Studies of Giftedness* (pp. 3–12). Münster: LIT.

Heller, K. A., Mönks, F. J., Sternberg, R. J., & Subotnik, R. F. (Eds.) (2000). *International Handbook of Giftedness and Talent* (2nd ed.). Amsterdam: Elsevier.

Hrzán, J. (2010). Frühe algebraische Kompetenzen bei mathematisch begabten und leistungsstarken Grundschulkindern – fördern oder ignorieren? In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 63–75). Offenburg: Mildenberger.

Hrzán, J., & Sefien, E. (2009a). Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Chancen und Möglichkeiten nicht nur für leistungsstarke Kinder (Teil I). *MNU-PRIMAr, 1*(1), 16–20.

Hrzán, J., & Sefien, E. (2009b). Gleichungen mit x in der Grundschule?! – Chancen und Möglichkeiten nicht nur für leistungsstarke Kinder (Teil II). *MNU-PRIMAr, 1*(2), 60–63.

Jäger, A. O. (1984). Intelligenzstrukturforschung: Konkurrierende Modelle, neue Entwicklungen, Perspektiven. *Psychologische Rundschau, 35*(1), 21–35.

Käpnick, F. (1998). *Mathematisch begabte Kinder. Modelle, empirische Studien und Förderungsprojekte für das Grundschulalter.* Frankfurt am Main: Lang.

Käpnick, F. (2006). Problembearbeitungsstile mathematisch begabter Grundschulkinder. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2006* (S. 59–60). Hildesheim: Franzbecker.

Käpnick, F. (2008). Diagnose und Förderung mathematisch begabter Kinder im Spannungsfeld zwischen interdisziplinärer Komplexität und Bereichsspezifik. In C. Fischer, F. J. Mönks, & U. Westphal (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Begabungen entfalten – Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (S. 3–23). Berlin: LIT.

Käpnick, F. (2010). Intuitionen – ein häufiges Phänomen beim Problemlösen mathematisch begabter Grundschulkinder. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 77–93). Offenburg: Mildenberger.

Kießwetter, K. (1985). Die Förderung von mathematisch besonders begabten und interessierten Schülern - ein bislang vernachlässigtes sonderpädagogisches Problem. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht, 38*(5), 300–306.

Kießwetter, K. (Hrsg.) (1988). *Berichte aus der Forschung: Das Hamburger Modell zur Identifizierung und Förderung von mathematisch besonders befähigten Schülern:* Universität Hamburg.

Kießwetter, K. (1992). „Mathematische Begabung“ – über die Komplexität der Phänomene und die Unzulänglichkeiten von Punktbewertungen. *Der Mathematikunterricht, 38*(1), 5–18.

Krause, W. (2000). *Denken und Gedächtnis aus naturwissenschaftlicher Sicht.* Göttingen: Hogrefe.

Krause, W., Seidel, G., & Heinrich, F. (2004). Multimodalität am Beispiel mathematischer Anforderungen. In *Sitzungsberichte der Leibniz-Sozietät. Band 64* (S. 135–152). Berlin.

Krutetskii, V. A. (1976). *The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.* Chicago: University of Chicago Press.

Krutezki, W. A. (1968). Altersbesonderheiten der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten bei Schülern. *Mathematik in der Schule, 8*(1), 44–58.

Lack, C. (2008). *Aufdecken mathematischer Begabung bei Kindern im 1. und 2. Schuljahr:* Dissertation, Universität Gießen.

Lompscher, J., & Gullasch, R. (1977). Die Entwicklung von Fähigkeiten. In Akademie der Pädagogischen Wissenschaften der Deutschen Demokratischen Republik (Hrsg.), *Psychologische Grundlagen der Persönlichkeitsentwicklung im pädagogischen Prozess* (S. 199–249). Berlin: Volk und Wissen.

Neubauer, A., & Stern, E. (2007). *Lernen macht intelligent: Warum Begabung gefördert werden muss.* München: Deutsche Verlags-Anstalt.

Nolte, M. (Hrsg.) (2004). *Der Mathe-Treff für Mathe-Fans.* Hildesheim: Franzbecker.

Nolte, M. (2008). Zur Förderung mathematisch besonders begabter Grundschulkinder im Rahmen des PriMa-Projekts in Hamburg. In C. Fischer, F. J. Mönks, & U. Westphal (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Begabungen entfalten - Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (S. 46–60). Berlin: LIT.

Nolte, M. (2010). Zum Erkennen und Nutzen von Mustern und Strukturen in Problemlöseprozessen. In T. Fritzlar & F. Heinrich (Hrsg.), *Kompetenzen mathematisch begabter Grundschulkinder erkunden und fördern* (S. 11–24). Offenburg: Mildenberger.

Nolte, M. (2011). „Ein hoher IQ garantiert eine hohe mathematische Begabung! Stimmt das?“ – Ergebnisse aus neun Jahren Talentsuche im PriMa-Projekt Hamburg. In R. Haug & L. Holzäpfel (Hrsg.), *Beiträge zum Mathematikunterricht 2011* (S. 611–614). Münster: WTM.

Nolte, M. (2012). “High IQ and high mathematical talent!” Results from nine years talent search in the Prima-project Hamburg. In *ICME 12 Pre-proceedings* (pp. 1503–1512). Seoul.

Nolte, M. (2013a). Fragen zur Diagnostik besonderer mathematischer Begabung. In T. Fritzlar & F. Käpnick (Hrsg.), *Mathematische Begabungen. Denkansätze zu einem komplexen Themenfeld aus verschiedenen Perspektiven.* Münster: WTM.

Nolte, M. (2013b). *Twice-exceptional children - mathematically gifted children in primary school with special needs.* CERME 8. Antalya, Turkey.

O'Boyle, M. W. (2008). Mathematically Gifted Children: Developmental Brain Characteristics and Their Prognosis for Well-Being. *Roeper Review, 30*, 181–186.

Oerter, R. (1992). Ökologische Perspektiven der Entwicklung von Hochbegabten. In E. A. Hany & H. Nickel (Hrsg.), *Begabung und Hochbegabung* (S. 23–38). Bern: Huber.

Olbertz, F. (2009). *Musikalische Hochbegabung: Frühe Erscheinungsformen und Einflussfaktoren anhand von drei Fallstudien.* Berlin: LIT.

Perleth, C. (2001). Follow-up-Untersuchungen zur Münchner Hochbegabungsstudie. In K. A. Heller (Hrsg.), *Hochbegabung im Kindes- und Jugendalter* (S. 357–446). Göttingen: Hogrefe.

Perleth, C., & Wilde, A. (2009). Developmental Trajectories of Giftedness in Children. In L. V. Shavinina (Ed.), *International Handbook on Giftedness* (1st ed., pp. 319–335). Dordrecht: Springer.

Pesenti, M., Zago, L., Crivello, F., Mellet, E., Samson, D., Duroux, B., et al. (2001). Mental calculation in a prodigy is sustained by right prefrontal and medial temporal areas. *nature neuroscience, 4*(1), 103–107.

Plomin, R. (1994). *Genetics and experience: the interplay between nature and nuture.* Thousand Oaks: Sage Publications.

Presmeg, N. C. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297–311.

Richman, H. B., Gobet, F., Staszewski, J. J., & Simon, H. A. (1996). Perceptual and Memory Processes in the Acquisition of Expert Performance: The EPAM Model. In K. A. Ericsson (Ed.), *The Road to Excellence.*

The Acquisition of Expert Performance in the Arts and Sciences, Sports, and Games (pp. 167–187). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Schmidt, S. (2010). Rechendreiecke und Rechenvierecke: Eine Fallstudie aus dem Grundschulbereich im Horizont von Reifung für das Umgehen mit Komplexität. In M. Nolte (Hrsg.), *Was macht Mathematik aus? Nachhaltige paradigmatische Ansätze für die Förderung mathematisch besonders begabter Schülerinnen und Schüler* (S. 93–107). Münster: WTM.

Schmidt, S., & Weiser, W. (2008). Wissen und Intelligenz beim Fördern mathematisch talentierter Grundschulkinder. In C. Fischer, F. J. Mönks, & U. Westphal (Hrsg.), *Individuelle Förderung: Begabungen entfalten - Persönlichkeit entwickeln. Fachbezogene Forder- und Förderkonzepte* (S. 24–45). Berlin: LIT.

Schneider, W. (1992). Erwerb von Expertise. Zur Relevanz kognitiver und nichtkognitiver Voraussetzungen. In E. A. Hany & H. Nickel (Hrsg.), *Begabung und Hochbegabung* (S. 105–122). Bern: Huber.

Sefien, E. S. M. (2007). Denk- und Vorgehensweisen leistungsstarker Kinder im Alter von 8 bis 10 Jahren beim Lösen mathematischer Probleme. In E. S. M. Sefien & H. Knopf (Hrsg.), *Leistungsexzellenz und ihre Determinanten* (S. 37–323). Berlin: Rhombos-Verlag.

Simon, H. A., & Chase, W. G. (1973). Skill in Chess. *American Scientist, 61*(4), 394–403.

Simonton, D. K. (1999). Talent and Its Development: An Emergenic and Epigenic Model. *Psychological Review, 106*(3), 435–457.

Spitzer, M. (2002). *Lernen: Gehirnforschung und Schule des Lebens.* Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Stein, M. (1996). Elementare Bausteine der Problemlösefähigkeit: Problemlösetechniken. *Journal für Mathematikdidaktik, 17*(2), 123–146.

Sternberg, R. J. (1998). Abilities Are Forms of Developing Expertise. *Educational Researcher, 27*(3), 11–20.

Sternberg, R. J. (2000). Giftedness as Developing Expertise. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (2nd ed., pp. 55–66). Amsterdam: Elsevier.

Stern, E. (2003). Lernen ist der mächtigste Mechanismus der kognitiven Entwicklung: Der Erwerb mathematischer Kompetenzen. In W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), *Entwicklung, Lehren und Lernen. Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert* (S. 207–217). Göttingen: Hogrefe.

Stern, E. (2005). Vom Gehirn zur Kultur: Mit Mathematik die Welt verstehen. In M. Hasselhorn, H. Marx, & W. Schneider (Hrsg.), *Diagnostik von Mathematikleistungen* (S. 293–300). Göttingen: Hogrefe.

Stern, W. (1916). Psychologische Begabungsforschung und Begabungsdiagnose. In P. Petersen (Hrsg.), *Der Aufstieg der Begabten. Vorfragen* (S. 105–120). Leipzig, Berlin: Teubner.

Stöger, H. (2009). The History of Giftedness Research. In L. V. Shavinina (Ed.), *International Handbook on Giftedness* (1st ed., pp. 17–38). Dordrecht: Springer.

Subotnik, R. F. (2008). The Psychosocial Dimensions Of Creativity In Mathematics: Implications For Gifted Education Policy. In R. Leikin (Ed.), *Proceedings of the 5th International Conference on Creativity in Mathematics and the Education of Gifted Students* (pp. 35–47). Tel Aviv: The Center for Educational Technology.

Süß, H.-M. (2006). Eine Intelligenz – viele Intelligenzen? Neuere Intelligenztheorien im Widerstreit. In H. Wagner (Hrsg.), *Intellektuelle Hochbegabung. Aspekte der Diagnostik und Beratung* (S. 7–39). Bonn: Bock.

Talhoff, K. (2012). Fallstudie zur Entwicklung einer mathematischen Begabung im Vorschulalter. In *Beiträge zum Mathematikunterricht 2012* (S. 869–872). Münster: WTM.

Waldmann, M. R., Renkl, A., & Gruber, H. (2003). Das Dreieck von Begabung, Wissen und Lernen. In W. Schneider & M. Knopf (Hrsg.), *Entwicklung, Lehren und Lernen. Zum Gedenken an Franz Emanuel Weinert* (S. 219–233). Göttingen: Hogrefe.

Waldmann, M., & Weinert, F. E. (1990). *Intelligenz und Denken. Perspektiven der Hochbegabungsforschung.* Göttingen: Hogrefe.

Weinert, F. E. (1997). Bedingungsfaktoren schulischer Leistung. In F. E. Weinert (Hrsg.), *Enzyklopädie der Psychologie: D, Serie 1, Band 3. Enzyklopädie der Psychologie. Psychologie des Unterrichts und der Schule* (S. 71–176). Göttingen: Hogrefe.

Weinert, F. E. (2000). Begabung und Lernen: Zur Entwicklung geistiger Leistungsunterschiede. In H. Wagner (Hrsg.), *Begabung und Leistung in der Schule* (2. Aufl., S. 7–24). Bad Honnef: Verlag Karl Heinrich Bock.

Weinert, F. E. (2001). Schulleistungen - Leistungen der Schule oder der Schüler? In F. E. Weinert (Hrsg.), *Leistungsmessungen in Schulen* (S. 73–86). Weinheim: Beltz.

Wieczerkowski, W. (1995). Begabungen, Selbsterfahrungen und Studienwünsche mathematisch besonders befähigter Jugendlicher. In B. Zimmermann (Hrsg.), *Kaleidoskop elementarmathematischen Entdeckens* (S. 195–228). Hildesheim: Franzbecker.

Wieczerkowski, W., Cropley, A. J., & Prado, T. M. (2000). Nurturing Talents/Gifts in Mathematics. In K. A. Heller, F. J. Mönks, R. J. Sternberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International Handbook of Giftedness and Talent* (2nd ed., pp. 413–425). Amsterdam: Elsevier.

Ziegler, A., & Phillipson, S. N. (2012). Towards a systemic theory of gifted education. *High Ability Studies, 23*(1), 3–30.

Zimmermann, B. (1992). Profile mathematischer Begabung. Fallstudien aus dem Hamburger Projekt sowie aus der Geschichte der Mathematik. *Der Mathematikunterricht, 38*(1), 19–41.

Zimmermann, B. (2005). Changing the Representation as an Important Tool for Mathematical Problem Solving. In E. Pehkonen (Ed.), *Problem Solving in Mathematics Education. Proceedings of the ProMath meeting June 30 - July 2, 2004 in Lahti* (pp. 141–151). Helsinki: University of Helsinki.